Über kürzeste Transversalen zwischen Erzeugenden einer hyperboloidischen Regelschaar.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität zu Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Freitag, den 1. September 1905, vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Bernhard Hepke.

Opponenten:

Herr stud. phil. **H. Brunzlow,**

Herr cand. iur. **K. Zerbe.**

Breslau

Buchdruckerei H. Fleischmann

1905.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Geheimer Regierungsrat Professor **Dr. Sturm.**

Meinen Eltern

gewidmet,

der Mutter in treuem Gedenken,

dem Vater in kindlicher Verehrung und Dankbarkeit.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer,

Herrn Geheimen Regierungsrat Prof. Dr. Sturm

für die reiche Anregung zu vorliegender Arbeit und seine bereitwilligen Ratschläge bei ihrer Ausführung meinen tiefestgefühlten Dank auszusprechen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0114

Über kürzeste Transversalen zwischen Erzeugenden einer hyperboloidischen Regelschaar.

§ 1.

Festlegung der Geraden einer hyperboloidischen Regelschaar sowie der kürzesten Transversale zwischen je zweien von ihnen.

Die Axengleichung eines einmanteligen Hyperboloids H^2 sei:

(1.) $$0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Um eine bestimmte Vorstellung von der Länge der reellen Halbaxen a und b zu haben, wollen und dürfen wir voraussetzen, dass:

$$a > b.$$

Die auf die Axengleichung der Fläche H^2 basierte parametrische Darstellung ihrer beiden Geradenschaaren sei:

(2.) $$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \gamma\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

(3.) $$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Die beiden Geradenschaaren seien als g- und l-Schaar bezeichnet. Geraden aus der ersteren sollen g, g_σ u. s. w. und die ihnen zugehörigen Parameter γ, γ_σ u. s. w. genannt

werden; l, l_σ u. s. w. und λ, λ_σ u. s. w. seien entsprechende Bezeichnungen für die l-Schaar.

Als zu den Richtungskosinussen der Gerade g proportionale Werte g′, g″, g‴ entnehmen wir aus (2):

$$g' = \frac{\gamma}{b}\cdot\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{1}{bc}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$(4.)\quad g'' = -\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a} = -\frac{2}{ca},$$

$$g''' = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\gamma b} - \frac{1}{a}\cdot\frac{\gamma}{b} = -\frac{1}{ab}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Nach (3.) erhalten wir folgende zu den Richtungskosinussen der Gerade l proportionale Werte l′, l″, l‴:

$$(5.)\quad l' = -\frac{1}{bc}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right),\quad l'' = -\frac{2}{ca},\quad l''' = \frac{1}{ab}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right).$$

So wie die Gleichungen (3.) aus (2.) hervorgehen, indem wir γ mit λ und b mit — b vertauschen, so folgen auch die Gleichungen (5.) aus den Gleichungen (4.) durch ebendieselbe Vertauschung.

Sind g und l zu einader parallel, so müssen die beiden Beziehungen bestehen:

$$(6.)\qquad g'' : g''' = l'' : l''',\quad g' : g''' = l' : l''',$$

von denen die erste zu:

$$-\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = \lambda + \frac{1}{\lambda},\ \text{das ist}$$

$$0 = (\gamma + \lambda)\ (\gamma\lambda + 1)$$

führt, während die zweite ergibt:

$$\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},\ \text{oder:}$$

$$0 = (\gamma + \lambda)\ (\gamma - \lambda).$$

Den beiden Forderungen (6.) wird also nur durch:

$$(7.)\qquad 0 = \gamma + \lambda$$

genügt. *Durch die Beziehung (7.) werden mithin die Parameter γ und λ zweier paralleler Geraden g und l zusammengehalten.*

Mit ξ, η sollen die Koordinaten des Schnittpunktes der Gerade g mit der Kehllellipse bezeichnet werden. Setzen wir in den Gleichungen (2.) $z = 0$, so erhalten wir zur Berechnung von ξ, η folgende zwei Gleichungen:

$$(8.) \qquad \frac{\xi}{a} = \gamma\,(1 - \frac{\eta}{b}),\quad \frac{\xi}{a} = \frac{1}{\gamma}\,(1 + \frac{\eta}{b}).$$

Sie ergeben:

$$(9.) \qquad \xi = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + 1}\,a,\quad \eta = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}\,b.$$

Und analog lauten die Ausdrücke für die Coordinaten des Schnittpunktes der Gerade l mit der Kehllellipse:

$$(10.) \qquad \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}\,a,\quad -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\,b.$$

Die durch den Punkt (ξ, η, o) gehende Gerade g hat, wie aus den Gleichungen (8.) folgt, den Parameter

$$(11.) \qquad \gamma = \frac{b\,\xi}{a\,(b - \eta)} = \frac{a\,(b + \eta)}{b\,\xi}.$$

Insbesondere entsprechen den durch die Scheitel gehenden Geraden folgende Parameterwerte:

$$(11_1.) \qquad \begin{aligned} &\gamma = 0 \text{ für den Scheitel } \xi = 0,\ \eta = -b;\\ &\gamma = \infty \text{ „ „ „ } \xi = 0,\ \eta = b;\\ &\gamma = 1 \text{ „ „ „ } \xi = a,\ \eta = o;\\ &\gamma = -1 \text{ „ „ „ } \xi = a,\ \eta = o. \end{aligned}$$

Ausser in der Form (2.) können wir unter Benutzung der Grössen ξ, η, g', g'', g''' die Gleichungen der Gerade g in folgender Form schreiben:

$$(12.) \qquad \frac{x - \xi}{g'} = \frac{y - \eta}{g''} = \frac{z}{g'''},$$

und bezeichnen wir den gemeinsamen Wert dieser drei Brüche mit r, so kommt:

$$(13.) \qquad x = rg' + \xi,\ y = rg'' + \eta,\ z = rg''',$$

womit wir für die Punkte (x, y, z) auf der Gerade g eine Parameterdarstellung mit dem Parameter r gewinnen. Jedem Punkt auf g entspricht ein ganz bestimmter Wert von r;

und jeder Wert von r legt einen ganz bestimmten Punkt auf g fest.

Seien P und $\bar{P}$ zwei auf g gelegene gleich weit vom Mittelpunkt der Fläche H^2 entfernte Punkte; wir fragen nach der Beziehung, die zwischen ihren Parametern r und $\bar{r}$ stattfindet.

Ist $OP = O\bar{P}$, so ist auch $OP^2 = O\bar{P}^2$, also:

$$(rg' + \mathfrak{x})^2 + (rg'' + \mathfrak{y})^2 + r^2 g'''^2 =$$
$$(\bar{r}g' + \mathfrak{x})^2 + (\bar{r}g'' + \mathfrak{y})^2 + \bar{r}^2 g'''^2, \text{ das gibt:}$$
$$0 = (r - \bar{r})\,[(r + \bar{r})\,(g'^2 + g''^2 + g'''^2) + 2\,(g'\mathfrak{x} + g''\mathfrak{y})].$$

Da wir die beiden Punkte P und $\bar{P}$ als verschieden von einander annehmen, so ist

$$r - \bar{r} \neq 0, \text{ mithin:}$$

$$(14.) \qquad r + \bar{r} = -\frac{2(g'\mathfrak{x} + g''\mathfrak{y})}{g'^2 + g''^2 + g'''^2}.$$

Nun ist nach (4.) und (9.):

$$g'\mathfrak{x} + g''\mathfrak{y} = \frac{2(\gamma^2 - 1)}{c(\gamma^2 + 1)}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right),$$

$$g'^2 + g''^2 + g'''^2 = \frac{a^2(\gamma^2 - 1)^2 + 4b^2\gamma^2 + c^2(\gamma^2 + 1)^2}{a^2 b^2 c^2 \gamma^2},$$

somit gibt (14.):

$$(15.)\; r + \bar{r} = \frac{4abc(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1)\gamma^2}{(\gamma^2 + 1)[a^2(\gamma^2 - 1)^2 + 4b^2\gamma^2 + c^2(\gamma^2 + 1)^2]}.$$

Folglich gewinnen wir den Satz:

„*Haben zwei auf g gelegene Punkte P und $\bar{P}$ gleichen Abstand vom Mittelpunkt der Fläche, so erfüllt die Summe der sie festlegenden Parameter die Beziehung (15.).*“ In ähnlicher Weise lässt sich die Umkehrung dieses Satzes zeigen: „*Genügen die Parameter zweier auf g gelegener Punkte der Beziehung (15.), so sind die Punkte gleich weit vom Mittelpunkt der Fläche entfernt.*“

Um uns Ausdrücke für die Richtungskosinusse des kürzesten Lots p_σ zwischen den Geraden g und g_σ zu verschaffen, bilden wir uns zuerst folgende Determinanten:

$$g'' g_\sigma''' - g''' g_\sigma'' = \frac{2}{a^2 b c}\left(\gamma_\sigma + \frac{1}{\gamma_\sigma}\right) - \frac{2}{a^2 b c}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{2}{a^2 b c \gamma \gamma_\sigma}(\gamma_\sigma - \gamma)(\gamma\gamma_\sigma - 1),$$

$$g''' g_\sigma' - g' g_\sigma''' = -\frac{1}{b^2 c a}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma_\sigma - \frac{1}{\gamma_\sigma}\right) + \frac{1}{b^2 c a}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma_\sigma + \frac{1}{\gamma_\sigma}\right)$$

$$= -\frac{2}{b^2 c a \gamma \gamma_\sigma}(\gamma_\sigma - \gamma)(\gamma + \gamma_\sigma),$$

$$g' g_\sigma'' - g'' g_\sigma' = -\frac{2}{c^2 a b}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{2}{c^2 a b}\left(\gamma_\sigma - \frac{1}{\gamma_\sigma}\right)$$

$$= \frac{2}{c^2 a b \gamma \gamma_\sigma}(\gamma_\sigma - \gamma)(\gamma\gamma_\sigma + 1).$$

Demnach *sind folgende Grössen proportional zu den Richtungskosinussen des kürzesten Lots* p_σ:

(16.) $$p_\sigma' = \frac{1}{a}(\gamma\gamma_\sigma - 1),\quad p_\sigma'' = -\frac{1}{b}(\gamma + \gamma_\sigma),\quad p_\sigma''' = \frac{1}{c}(\gamma\gamma_\sigma + 1).$$

Zur Ermittelung der Coordinaten der Schnittpunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_\sigma$ des kürzesten Lots p_σ mit den Geraden g und g_σ schlagen wir folgenden Weg ein.

Nach (12.) setzen wir als Gleichungen von g:

(17.) $$y = \frac{g''}{g'} x + \eta - \frac{g''}{g'}\xi,\quad z = \frac{g'''}{g'} x - \frac{g'''}{g'}\xi,\quad \text{oder kurz:}$$

$$y = \mu x + m,\quad z = \nu x + n;$$

und analog als Gleichungen von g_σ:

(18.) $$y = \frac{g_\sigma''}{g_\sigma'} x + \eta_\sigma - \frac{g_\sigma''}{g_\sigma'}\xi_\sigma,\quad z = \frac{g_\sigma'''}{g_\sigma'} x - \frac{g_\sigma'''}{g_\sigma'}\xi_\sigma,\quad \text{oder:}$$

$$y = \mu_\sigma x + m_\sigma,\quad z = \nu_\sigma x + n_\sigma.$$

Ähnlich schreiben wir die Gleichungen von p_σ:

(19.) $$y = \bar{\mu} x + \bar{m},\quad z = \bar{\nu} x + \bar{n},\quad \text{wobei:}$$

$$\bar{\mu} = \frac{p_\sigma''}{p_\sigma'},\quad \bar{\nu} = \frac{p_\sigma'''}{p_\sigma'}.$$

Der Punkt $\mathfrak{P}$ liegt auf g, also genügen seine Coordinaten $(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \mathfrak{P}''')$ den Gleichungen (17.):

(20.) $$\mathfrak{P}'' = \mu\mathfrak{P}' + m,\quad \mathfrak{P}''' = \nu\mathfrak{P}' + n.$$

Der Punkt $\mathfrak{P}$ liegt aber auch auf p_σ, folglich liefert (19.):

$$(21.) \qquad \mathfrak{P}'' = \bar{\mu}\,\mathfrak{P}' + \bar{m}, \quad \mathfrak{P}''' = \bar{\nu}\,\mathfrak{P}' + \bar{n}.$$

Aus den ersten Gleichungen in (20.) und (21.) folgt:

$$(22.) \qquad \mathfrak{P}' = \frac{\bar{m} - m}{\mu - \bar{\mu}}, \text{ und analog erhalten wir:}$$

$$(23.) \qquad \mathfrak{P}_\sigma' = \frac{\bar{m} - m_\sigma}{\mu_\sigma - \bar{\mu}}.$$

Die Elimination von $\bar{m}$ aus (22.) und (23.) gibt:

$$(24.) \qquad 0 = \mathfrak{P}'(\mu - \bar{\mu}) - \mathfrak{P}_\sigma'(\mu_\sigma - \bar{\mu}) + m - m_\sigma.$$

Aus den zweiten Gleichungen in (20.) und (21.) folgt:

$$(25.) \qquad \mathfrak{P}' = \frac{n - \bar{n}}{\nu - \bar{\nu}}, \text{ und ähnlich ergibt sich:}$$

$$(26.) \qquad \mathfrak{P}_\sigma' = \frac{\bar{n} - n_\sigma}{\nu_\sigma - \bar{\nu}}.$$

Die Elimination von $\bar{n}$ aus (25.) und (26.) führt zu:

$$(27.) \qquad 0 = \mathfrak{P}'(\nu - \bar{\nu}) - \mathfrak{P}_\sigma'(\nu_\sigma - \bar{\nu}) + n - n_\sigma.$$

In den Gleichungen (24.) und (27.) treten als einzige Unbekannte die Coordinaten $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}_\sigma'$ auf. Für sie erhalten wir:

$$(28.) \qquad \mathfrak{P}' = \frac{(m_\sigma - m)(\nu_\sigma - \bar{\nu}) - (n_\sigma - n)(\mu_\sigma - \bar{\mu})}{(\mu - \bar{\mu})(\nu_\sigma - \bar{\nu}) - (\nu - \bar{\nu})(\mu_\sigma - \bar{\mu})},$$

$$(29.) \qquad \mathfrak{P}_\sigma' = \frac{(m_\sigma - m)(\nu - \bar{\nu}) - (n_\sigma - n)(\mu - \bar{\mu})}{-(\mu_\sigma - \bar{\mu})(\nu - \bar{\nu}) + (\nu_\sigma - \bar{\nu})(\mu - \bar{\mu})}.$$

Die Coordinaten $\mathfrak{P}_\sigma''$, $\mathfrak{P}_\sigma'''$ ergeben sich dann nach (18.) als:

$$(30.) \qquad \mathfrak{P}_\sigma'' = \mu_\sigma\,\mathfrak{P}_\sigma' + m_\sigma, \quad \mathfrak{P}_\sigma''' = \nu_\sigma\,\mathfrak{P}_\sigma' + n_\sigma.$$

Nun ist:

$$m_\sigma - m = \eta_\sigma - \frac{g_\sigma''}{g_\sigma'}\xi_\sigma - \left(\eta - \frac{g''}{g'}\xi\right)$$

$$= \frac{b(\gamma_\sigma^2 + 1)}{\gamma_\sigma^2 - 1} - \frac{b(\gamma^2 + 1)}{\gamma^2 - 1} = \frac{2b(\gamma^2 - \gamma_\sigma^2)}{(\gamma^2 - 1)(\gamma_\sigma^2 - 1)},$$

$$n_\sigma - n = -\frac{g_\sigma'''}{g_\sigma'}\mathfrak{r}_\sigma + \frac{g'''}{g'}\mathfrak{r}$$

$$= \frac{2c\gamma_\sigma}{\gamma_\sigma^2 - 1} - \frac{2c\gamma}{\gamma^2 - 1} = \frac{2c(\gamma\gamma_\sigma + 1)(\gamma - \gamma_\sigma)}{(\gamma^2 - 1)(\gamma_\sigma^2 - 1)},$$

$$\nu - \bar{\nu} = \frac{g'''}{g'} - \frac{p_\sigma'''}{p_\sigma'}$$

$$= -\frac{c(\gamma^2 + 1)}{a(\gamma^2 - 1)} - \frac{a(\gamma\gamma_\sigma + 1)}{c(\gamma\gamma_\sigma - 1)}$$

$$= -\frac{c^2(\gamma^2 + 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma + 1)}{ca(\gamma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1)},$$

$$\mu - \bar{\mu} = \frac{g''}{g'} - \frac{p_\sigma''}{p_\sigma'}$$

$$= -\frac{2b\gamma}{a(\gamma^2 - 1)} + \frac{a(\gamma + \gamma_\sigma)}{b(\gamma\gamma_\sigma - 1)}$$

$$= \frac{-2b^2\gamma(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma + \gamma_\sigma)}{ab(\gamma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1)},$$

$$\mu_\sigma - \mu = \frac{g_\sigma''}{g_\sigma'} - \frac{p_\sigma''}{p_\sigma'} = -\frac{2b\gamma_\sigma}{a(\gamma_\sigma^2 - 1)} + \frac{a(\gamma + \gamma_\sigma)}{b(\gamma\gamma_\sigma - 1)}$$

$$= \frac{-2b^2\gamma_\sigma(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma + \gamma_\sigma)}{ab(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1)},$$

$$\nu_\sigma - \bar{\nu} = \frac{g_\sigma'''}{g_\sigma'} - \frac{p_\sigma'''}{p_\sigma'} = -\frac{c(\gamma_\sigma^2 + 1)}{a(\gamma_\sigma^2 - 1)} - \frac{a(\gamma\gamma_\sigma + 1)}{c(\gamma\gamma_\sigma - 1)}$$

$$= -\frac{c^2(\gamma_\sigma^2 + 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma + 1)}{ca(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1)}.$$

Mit diesen Differenzen wird aus (29.):

$$\mathfrak{P}_\sigma' = \frac{2a(\gamma - \gamma_\sigma)(\gamma\gamma_\sigma - 1)}{\gamma^2 - 1} \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \text{ falls:}$$

$$\varepsilon' = -b^2(\gamma + \gamma_\sigma)[c^2(\gamma^2 + 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma + 1)]$$
$$- c^2(\gamma\gamma_\sigma + 1)[-2b^2\gamma(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma + \gamma_\sigma)]$$
$$= -(\gamma^2 - 1)[a^2(b^2 + c^2)(\gamma\gamma_\sigma + 1)(\gamma + \gamma_\sigma) + b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)(\gamma - \gamma_\sigma)],$$

$$\varepsilon = -[-2b^2\gamma(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma + \gamma_\sigma)] \times$$
$$\times [c^2(\gamma_\sigma^2 + 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma + 1)]$$
$$+ [-2b^2\gamma_\sigma(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma_\sigma^2 - 1)(\gamma + \gamma_\sigma)] \times$$
$$\times [c^2(\gamma^2 + 1)(\gamma\gamma_\sigma - 1) + a^2(\gamma^2 - 1)(\gamma\gamma_\sigma + 1)]$$

$$= 2b^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)\,[c^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)\,[\gamma(\gamma_\sigma{}^2 + 1) - \gamma_\sigma(\gamma^2 + 1)] + a^2(\gamma\gamma_\sigma + 1)\,[\gamma(\gamma_\sigma{}^2 - 1) - \gamma_\sigma(\gamma^2 - 1)]] - 2c^2a^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)(\gamma - \gamma_\sigma)(\gamma + \gamma_\sigma)^2$$

$$= -2(\gamma - \gamma_\sigma)(\gamma\gamma_\sigma - 1)\,[b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)^2 + c^2a^2(\gamma + \gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma + 1)^2].$$

Folglich gibt (29.):

(31.) $$\mathfrak{P}_\sigma' = a\frac{a^2(b^2+c^2)(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma+\gamma_\sigma) + b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma-\gamma_\sigma)}{b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2}.$$

Mit (30.) erhalten wir dann weiter:

$$\mathfrak{P}_\sigma'' = b\,\frac{\varepsilon''}{[b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2](\gamma_\sigma{}^2-1)},$$

$$\mathfrak{P}_\sigma''' = c\,\frac{\varepsilon'''}{[b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2](\gamma_\sigma{}^2-1)},$$

wobei:

$$\varepsilon'' = -2\gamma_\sigma[a^2(b^2+c^2)(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma+\gamma_\sigma) + b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma-\gamma_\sigma)] + (\gamma_\sigma{}^2+1)[b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2]$$

$$= (\gamma_\sigma{}^2-1)\,[b^2(c^2+a^2)(\gamma^2\gamma_\sigma{}^2-1) - c^2a^2(\gamma^2-\gamma_\sigma{}^2)],$$

$$\varepsilon''' = -(\gamma_\sigma{}^2+1)[a^2(b^2+c^2)(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma+\gamma_\sigma) + b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma-\gamma_\sigma)] + 2\gamma_\sigma[b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2]$$

$$= (\gamma_\sigma{}^2-1)[c^2(b^2-a^2)(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma+\gamma_\sigma) + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma-\gamma_\sigma)].$$

Mithin ergibt sich:

(32.) $$\mathfrak{P}_\sigma'' = b\,\frac{b^2(c^2+a^2)(\gamma^2\gamma_\sigma{}^2-1) - c^2a^2(\gamma^2-\gamma_\sigma{}^2)}{b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2},$$

(33.) $$\mathfrak{P}_\sigma''' = c\,\frac{c^2(b^2-a^2)(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma+\gamma_\sigma) + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma-\gamma_\sigma)}{b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2}.$$

Die Formeln (31.), (32.), (33.) geben uns also die Coordinaten des auf g_σ gelegenen Fusspunktes $\mathfrak{P}_\sigma$ des kürzesten Lots zwischen g und g_σ. Vertauschen wir in diesen Formeln γ_σ mit γ und γ mit γ_σ, so erhalten wir Ausdrücke für die Coordinaten des auf g gelegenen Fusspunktes $\mathfrak{P}$. Setzen wir $\gamma_\sigma = \gamma$, so erhalten wir die Coordinaten des Centralpunkts ω von g, nämlich:

$$\omega' = -\frac{2a^3(b^2+c^2)(\gamma^2+1)\gamma}{b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2},$$

(34.) $$\omega'' = \frac{b^3(c^2+a^2)(\gamma^4-1)}{b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2},$$

$$\omega''' = \frac{2c^3(b^2-a^2)(\gamma^2-1)\gamma}{b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2}.$$

Und der den Centralpunkt ω festlegende Parameter r_ω ist:

(34.) $$r_\omega = \frac{\omega'''}{g'''} = -\frac{2abc^3(b^2-a^2)(\gamma^2-1)\gamma^2}{(\gamma^2+1)[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2]}.$$

Die im Zähler und Nenner auftretenden Summen in den Ausdrücken für die Coordinaten von $\mathfrak{P}_\sigma$ betrachten wir genauer. Abkürzend wollen wir schreiben:

(35.) $$\mathfrak{P}_\sigma' = a\frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}},\quad P_\sigma'' = b\frac{\mathfrak{N}''}{\mathfrak{N}},\quad \mathfrak{P}_\sigma''' = c\frac{\mathfrak{N}'''}{\mathfrak{N}},$$

wobei die Grössen $\mathfrak{N}$ nach Potenzen von γ_σ geordnet folgende sind:

$$\mathfrak{N} = \gamma_\sigma^2[b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2]-2\gamma_\sigma\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2,$$

$$\mathfrak{N}' = -\gamma_\sigma^2\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)+\gamma_\sigma(1+\gamma^2)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2),$$

$$\mathfrak{N}'' = \gamma_\sigma^2[b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2]-[b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2],$$

$$\mathfrak{N}''' = \gamma_\sigma^2\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)-\gamma_\sigma(1-\gamma^2)(b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2)-\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2).$$

Führen wir nun folgende in den späteren §§ oft zur Verwendung kommenden Grössen k, ϑ, υ ein:

(36.) $$k_1 = b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2,\quad k_2 = b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2,$$
$$k_3 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,$$
$$\vartheta = b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2,\quad \upsilon = b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2,$$

so lassen sich die Grössen $\mathfrak{N}$ in folgender Form schreiben:

(37.)
$$\mathfrak{N} = \gamma_\sigma^2\vartheta-2\gamma_\sigma\gamma k_2+\upsilon,$$
$$\mathfrak{N}' = -\gamma_\sigma^2\gamma k_2+\gamma_\sigma(1+\gamma^2)k_3-\gamma k_2,$$
$$\mathfrak{N}'' = \gamma_\sigma^2\vartheta-\upsilon,$$
$$\mathfrak{N}''' = \gamma_\sigma^2\gamma k_2-\gamma_\sigma(1-\gamma^2)k_1-\gamma k_2.$$

In die drei Grössen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ geht sowohl der Parameter γ als auch γ_σ quadratisch ein. Halten wir die Gerade g, also den Parameter γ, fest, so ist der Parameter γ_σ die einzige Variable. Und es erhebt sich die Frage, ob nicht bei konstantem γ eine homogene lineare Relation zwischen den drei Grössen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ stattfindet. Bedeuten n', n'', n''' drei den Parameter γ_σ nicht enthaltende Zahlen, so kann die Beziehung:

$$0 \equiv \mathfrak{N}' n' + \mathfrak{N}'' n'' + \mathfrak{N}''' n''' \tag{38.}$$

für alle γ_σ nur dann bestehen, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma k_2 n' + \vartheta n'' + \gamma k_2 n''' , \\ 0 &= (1+\gamma^2) k_3 n' - (1-\gamma^2) k_1 n''' , \\ 0 &= \gamma k_2 n' + \upsilon n'' + \gamma k_2 n''' . \end{aligned} \tag{39.}$$

Die Determinante Δ dieses Systems von drei homogenen linearen Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} \Delta &= -(1-\gamma^2)\gamma k_1 k_2 \upsilon - \vartheta[(1+\gamma^2)\gamma k_2 k_3 + (1-\gamma^2)\gamma k_1 k_2] \\ &\quad + (1+\gamma^2)\gamma k_2 k_3 \upsilon . \\ &= k_2 \gamma [k_3(-\vartheta+\upsilon)(1+\gamma^2) - k_1(\vartheta+\upsilon)(1-\gamma^2)] . \end{aligned}$$

Nun ist nach (36.):

$$\vartheta + \upsilon = k_3(1+\gamma^2) , \quad -\vartheta + \upsilon = k_1(1-\gamma^2) ;$$

folglich verschwindet Δ, und es ergibt sich für (39.) folgendes Lösungssystem:

$$n' : n'' : n''' = k_1(\gamma^2 - 1) : 2k_2\gamma : -k_3(\gamma^2+1) . \tag{40.}$$

Bei constantem γ gibt es also drei den Parameter γ_σ nicht enthaltende Zahlen n', n'', n''', die zur Identität (38.) führen. Nun ist nach (35.):

$$\mathfrak{N}' = \frac{\mathfrak{N}}{a}\mathfrak{P}_\sigma' , \quad \mathfrak{N}'' = \frac{\mathfrak{N}}{b}\mathfrak{P}_\sigma'' , \quad \mathfrak{N}''' = \frac{\mathfrak{N}}{c}\mathfrak{P}_\sigma''' ,$$

also wird aus der Identität (38.):

$$0 \equiv bcn'\mathfrak{P}_\sigma' + can''\mathfrak{P}_\sigma'' + abn'''\mathfrak{P}_\sigma''' ,$$

das gibt mit Rücksicht auf (40.):

$$0 \equiv bck_1(\gamma^2-1)\mathfrak{P}_\sigma' + 2cak_2\gamma\mathfrak{P}_\sigma'' - abk_3(\gamma^2+1)\mathfrak{P}_\sigma''' . \tag{41.}$$

Den Schluss dieses § bilde die Aufstellung einiger im Folgenden oft gebrauchten Beziehungen zwischen den in (36.) definierten Grössen $k_1, k_2, k_3, \vartheta, \upsilon$.

$$k_1+k_2=2c^2(b^2-a^2),\quad k_2+k_3=2b^2c^2,\quad k_3+k_1=2b^2(c^2+a^2),$$

$$k_1-k_2=2a^2b^2,\quad k_2-k_3=-2a^2(b^2+c^2),\quad k_3-k_1=2c^2a^2;$$

$$k_2+b^4=(b^2+c^2)(b^2-a^2),\quad k_3+c^4=(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$
$$k_1-a^4=(b^2-a^2)(c^2+a^2);$$

$$k_2k_3=b^4c^4-a^4(b^2+c^2)^2,\quad k_3k_1=b^4(c^2+a^2)^2-c^4a^4,$$
$$k_1k_2=c^4(b^2-a^2)^2-a^4b^4;$$

$$k_3k_1+k_2^2=2b^2[b^2(c^4+a^4)+c^2a^2(a^2-c^2)],$$
$$k_3k_1-k_2^2=2c^2a^2[-c^2a^2-b^2(a^2-c^2-2b^2)]=2c^2a^2(2b^4+k_2);$$
$$b^2+c^2)k_1=b^4(c^2+a^2)+c^4(b^2-a^2)=b^2k_3+c^2k_2,$$
$$(c^2+a^2)k_2=c^4(b^2-a^2)-a^4(b^2+c^2)=c^2k_1-a^2k_3,$$
$$(b^2-a^2)k_3=b^4(c^2+a^2)-a^4(b^2+c^2)=b^2k_1+a^2k_2;$$
$$(b^2-a^2)k_3^2+(c^2+a^2)k_2^2=(b^2k_1+a^2k_2)k_3+(c^2k_1-a^2k_3)k_2$$
$$=(b^2k_3+c^2k_2)k_1$$
$$=(b^2+c^2)k_1^2;$$

$$\vartheta+\upsilon=k_3(\gamma^2+1),\quad \vartheta-\upsilon=k_1(\gamma^2-1);$$

$$\vartheta\gamma^2+\upsilon=[b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2]\gamma^2+b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2$$
$$=-2k_1\gamma^2+b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2=k_1(\gamma^4+1)+c^2a^2(\gamma^2+1)^2,$$

$$\vartheta\gamma^2-\upsilon=b^2(c^2+a^2)(\gamma^4-1),$$

$$2(\vartheta\gamma^2+\upsilon)=-2k_1\gamma^2+b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^4+1)+c^2a^2(\gamma^2+1)^2$$
$$=k_1(\gamma^2-1)^2+k_3(\gamma^2+1)^2,$$

$$\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2=-2(k_1+k_2)\gamma^2+b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2$$
$$=-4c^2(b^2-a^2)\gamma^2+b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2;$$

$$\upsilon\gamma^2+\vartheta=[b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2]\gamma^2+b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2$$
$$=2k_1\gamma^2+c^2a^2(\gamma^2+1)^2,$$

$$\upsilon\gamma^2-\vartheta=c^2a^2(\gamma^4-1).$$

---

§ 2.

Durch jeden Punkt auf jeder Gerade g der Regelschaar gehen im allgemeinen zwei kürzeste Transversalen zwischen jener und je einer andern. Es gibt stets zwei reelle auf g gelegene Punkte [Cuspidal-punkte], für welche die beiden durch sie gehenden kürzesten Transversalen [Cuspidaltransversalen] sich vereinigen.

Setzen wir den Satz[1]) als bekannt voraus, dass die Strahlenkongruenz, welche von den kürzesten Transversalen zwischen je zwei Geraden einer Regelschaar gebildet wird, von der dritten Ordnung ist und die Erzeugenden der Leitschaar enthält, so folgt sofort, dass durch jeden Punkt des Raumes, also auch durch jeden Punkt P auf jeder Erzeugenden g insgesamt drei Geraden gehen, auf welchen kürzeste Lote zwischen zwei Erzeugenden der g-Schaar liegen. Von den drei durch den Punkt P auf der Erzeugenden g laufenden kürzesten Transversalen ist die eine die durch ihn gehende Erzeugende l aus der Leitschaar, und diese ist im allgemeinen nicht normal zu g, also im allgemeinen nicht kürzeste Transversale zwischen zwei Erzeugenden der g-Schaar, von denen die g die eine wäre. Dass die beiden andern durch den Punkt P gehenden kürzesten Transversalen dann

---

[1]) S. Wälsch, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse der Wiener Sitzungsberichte, Abteilung II, Band 95 Seite 781 u. f. Ebendaselbst findet sich Seite 789 [ohne Beweis] der Satz: „Zieht man zwischen einer Erzeugenden einer Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung und den übrigen Erzeugenden derselben Schaar die kürzesten Transversalen, so erfüllen diese eine Regelfläche dritter Ordnung; variiert die erste Erzeugende, so erfüllen die Cuspidalpunkte dieser Fläche eine sphärische Raumkurve vierter Ordnung, ihre Cuspidalkanten eine Fläche zweiter Ordnung, für welche diese Kurve vierter Ordnung Orthogonalpunktskurve ist; man erhält dieselbe Kurve für die Erzeugenden der andern Schaar.“ S. auch Sturm, Liniengeometrie Band I Nr. 135, 136.

solche zwischen g und je einer andern g_σ sein müssen, erhellt daraus, dass es durch jeden Punkt auf jeder Erzeugenden nur eine Erzeugende aus der Leitschaar gibt. Aus dem zitierten Satze folgt also, dass durch jeden Punkt auf jeder Gerade einer Regelschaar im allgemeinen zwei kürzeste Transversalen zwischen dieser und je einer andern gehen.

Zu demselben Ergebnis führen uns unabhängig von jenem Satze die Formeln (31.), (32.), (33.) des § 1. Sind nämlich g und g_σ zwei Geraden der g-Schaar, so hat der auf der ersteren gelegene Fusspunkt $\mathfrak{P}$ ihres kürzesten Lotes die z-Coordinate:

$$(42.)\quad \mathfrak{P}''' = c\,\frac{c^2(b^2-a^2)(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma+\gamma_\sigma)-a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma-\gamma_\sigma)}{b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2+c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2+a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2}.$$

Dem Punkte $\mathfrak{P}$ auf g kommt nach (13.) des § 1 der durch:

$$\mathfrak{P}''' = r\,g'''$$

bestimmte Parameter r zu, sodass wir aus (42.) folgende Beziehung zwischen γ, r, γ_σ erhalten:

$$(43.)\quad -r\frac{1}{ab}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)=c\,\frac{c^2(b^2-a^2)(\gamma\gamma_\sigma-1)(\gamma+\gamma_\sigma)-a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)(\gamma-\gamma_\sigma)}{b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma-1)^2+c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2+a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2}.$$

Sie ist linear in r, quadratisch in γ_σ, zeigt also, dass durch den Punkt $\mathfrak{P}$ auf g nicht nur das eine kürzeste Lot zwischen g und g_σ läuft, sondern dass noch ein zweites kürzestes Lot zwischen g und einer bestimmten Gerade aus der g-Schaar hindurchgeht, sodass von dem auf g gelegenen Punkte $\mathfrak{P}$ insgesamt zwei kürzeste Lote zwischen g und je einer andern Gerade ausstrahlen. In γ ist die Beziehung (43.) biquadratisch, was wir dahin zu deuten haben: *Unter den kürzesten Loten $p_{\pi\rho}$ zwischen einer festen Gerade g_π und sämtlichen andern g_ρ der Schaar gibt es vier, deren Fusspunkt auf g_ρ einem gegebenen Parameterwert r entspricht.*

Nach Potenzen von γ_σ geordnet gibt (43.):

$$\begin{aligned}0 = {}& \gamma_\sigma^2[r(\gamma^2+1)[b^2(c^2+a^2)\gamma^2+c^2a^2]+\gamma^2abc(b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2)]\\ &+\gamma_\sigma\gamma(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)[-2r(\gamma^2+1)+abc(\gamma^2-1)]\\ &+r(\gamma^2+1)[b^2(c^2+a^2)+c^2a^2\gamma^2]-\gamma^2abc(b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2),\end{aligned}$$

das ist mit den in (36.) des § 1 eingeführten Abkürzungen:

(**44.**) $0 = \gamma_\sigma^2[r(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 abck_1] + \gamma_\sigma\gamma k_2[-2r(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)]$
$+ r(\gamma^2+1)\upsilon - \gamma^2 abc k_1 .$

Ist also $\mathfrak{P}$ ein auf g gelegener Punkt, bestimmt durch den Parameter r, so sind die Parameter γ_σ derjenigen beiden Geraden g_σ, deren kürzeste Entfernungen von g in $\mathfrak{P}$ sich schneiden, durch die in γ_σ quadratische Gleichung (44.) gegeben. Betrachten wir speziell die auf der Kehllellipse gelegenen Scheitel und ermitteln wir die zu ihnen gehörigen Geraden g_σ, so nimmt für $r = 0$ die Beziehung (44.) nach Division mit γ folgende Gestalt an:

$$0 = \gamma_\sigma^2 \gamma k_1 + \gamma_\sigma k_2 (\gamma^2 - 1) - \gamma k_1, \quad (44_1.)$$

woraus wir, unter Beachtung der Ergebnisse in (11_1.) des § 1, entnehmen, dass dem Scheitel $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = -b$ auf der Gerade mit dem Parameter $\gamma = 0$ diejenigen beiden Geraden g_σ zugehören, welche durch die Parameter $\gamma = 0$, $\gamma = \infty$ bestimmt werden, was wir kurz so ausdrücken wollen:

Zum Scheitel $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = -b$ auf $\gamma = 0$ gehören $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$.

Ähnlich ergibt (44_1.) die drei weiteren Sätze:

Z. Scheitel $\mathfrak{x} = 0, \mathfrak{y} = b$ auf $\gamma = \infty$ gehör. $\gamma = \infty$ u. $\gamma = 0$;
„ „ $\mathfrak{x} = a, \mathfrak{y} = 0$ auf $\gamma = 1$ „ $\gamma = 1$ u. $\gamma = -1$;
„ „ $\mathfrak{x} = -a, \mathfrak{y} = 0$ auf $\gamma = -1$ „ $\gamma = -1$ u. $\gamma = 1$.

Damit haben wir zugleich bestätigt gefunden, dass die zur g-Schaar gehörige Striktionslinie durch die auf der Kehllellipse gelegenen Scheitel hindurchgeht [S. Sturm, Math. Ann. Bd. 6, Seite 257]. Kehren wir nach dieser Abschweifung zur allgemeinen Gleichung (44.) zurück. In ihrer Diskriminante:

$$\gamma^2 k_2^2 [-2r(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)]^2$$
$$- 4[r(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 abc k_1][r(\gamma^2+1)\upsilon - \gamma^2 abc k_1]$$

tritt r quadratisch auf; sie, gleich Null gesetzt, liefert zwei Werte r, für welche je die beiden zu ihnen gehörigen Werte

von γ_σ einander gleich werden. Nach Potenzen von r geordnet gibt die gleich Null gesetzte Diskriminante:

(**45.**) $$0 = 4r^2(\gamma^2+1)^2(\gamma^2 k_2^2 - \vartheta\upsilon) + 4rabc\gamma^2(\gamma^2+1)[-(\gamma^2-1)k_2^2 + k_1(\vartheta-\upsilon)] + a^2b^2c^2\gamma^2[(\gamma^2-1)^2 k_2^2 + 4\gamma^2 k_1^2].$$

Nun ist:

$$\gamma^2 k_2^2 - \vartheta\upsilon =$$

$$\gamma^2(b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)^2 - [b^2(c^2+a^2)\gamma^2 + c^2a^2][b^2(c^2+a^2) + c^2a^2\gamma^2] =$$

$$a^2b^2c^2[2\gamma^2(a^2 - 2b^2 - c^2) - (1+\gamma^4)(c^2+a^2)] =$$

$$- a^2b^2c^2[4\gamma^2(b^2+c^2) + (\gamma^2-1)^2(c^2+a^2)],$$

$$(\gamma^2-1)k_2^2 + (\vartheta-\upsilon)k_1 = (\gamma^2-1)k_2^2 + k_1^2 = 4a^2b^2c^2(b^2-a^2)(\gamma^2-1);$$

folglich kann die Gleichung (45.) geschrieben werden:

(**46.**) $$0 = \rho_0 r^2 + \rho_1 r + \rho_2,$$ falls:

$$\rho_0 = -4(\gamma^2+1)^2[4\gamma^2(b^2+c^2) + (\gamma^2-1)^2(c^2+a^2)],$$

$$\rho_1 = 16abc(b^2-a^2)(\gamma^4-1)\gamma^2,$$

$$\rho_2 = \gamma^2[4\gamma^2 k_1^2 + (\gamma^2-1)^2 k_2^2].$$

Die Diskriminante der Gleichung (46.) ist:

$$\rho_1^2 - 4\rho_2\rho_0,$$

und das ist eine stets positive Grösse, weil $\rho_2 \geq 0$, $\rho_0 < 0$. Demnach sind die Wurzeln von (46.), oder, was dasselbe ist, von (45.) stets reell, das heisst, *es gibt auf g zwei stets reelle Punkte, für welche die beiden durch sie gehenden kürzesten Transversalen sich vereinigen.* Diese beiden stets reellen Punkte von g sollen ihre *Cuspidalpunkte* genannt und mit D, $\bar{D}$ sowie ihre Parameter mit r_D, $r_{\bar{D}}$ bezeichnet werden; für die durch sie gehenden kürzesten Transversalen gebrauchen wir [nach Wälsch] die Bezeichnung *Cuspidaltransversalen.* Diejenige von g im allgemeinen verschiedene Gerade, auf der die durch D gehende Cuspidaltransversale auch noch senkrecht steht, heisse g_D und ihr Parameter γ_D. Analoge Bezeichnungen gelten für den Punkt D.

Wir können leicht die Länge der auf der Gerade g gelegenen Strecke $D\bar{D}$ als Funktion des Parameters γ ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} D\bar{D}^2 &= (D' - \bar{D}')^2 + (D'' - D'')^2 + (D''' - D''')^2 \\ &= (r_D - r_{\bar{D}})^2 (g'^2 + g''^2 + g'''^2) . \end{aligned}$$

Nun haben wir nach (46.):

$$r + r_{\bar{D}} = -\rho_1 : \rho_0 , \quad r_D r_{\bar{D}} = \rho_2 : \rho_0 , \quad \text{mithin:}$$
$$(r_D - r_{\bar{D}})^2 = (\rho_1^2 - 4\rho_2\rho_0) : \rho_0^2 ;$$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 - 4\rho_2\rho_0 = 16\gamma^2(\gamma^2+1)^2 \big[& (\gamma^2-1)^4 (c^2+a^2) k_2^2 + 16\gamma^4 (b^2+c^2) k_1^2 \\ & + 4\gamma^2 (\gamma^2-1)^2 \left[4a^2b^2c^2 (b^2-a^2)^2 \right. \\ & \left. + (c^2+a^2) k_1^2 + (b^2+c^2) k_2^2 \right] \big] \\ = 16\gamma^2(\gamma^2+1)^2 \big[& (\gamma^2-1)^4 (c^2+a^2) k_2^2 + 16\gamma^4 (b^2+c^2) k_1^2 \\ & + 4\gamma^2 (\gamma^2-1)^2 \left[(c^2+a^2) k_2^2 + (b^2+c^2) k_1^2 \right] \big] \\ = 16\gamma^2(\gamma^2+1)^4 \big[& (\gamma^2-1)^2 (c^2+a^2) k_2^2 + 4\gamma^2 (b^2+c^2) k_1^2 \big]; \end{aligned}$$

ferner ist:

$$g'^2 + g''^2 + g'''^2 = \frac{(\gamma^2-1)^2(c^2+a^2) + 4\gamma^2(b^2+c^2)}{a^2b^2c^2\gamma^2} , \quad \text{folglich:}$$

$$(\mathbf{46_1}.) \qquad D\bar{D}^2 = \frac{(\gamma^2-1)^2(c^2+a^2) k_2^2 + 4\gamma^2(b^2+c^2) k_1^2}{a^2b^2c^2 \left[(\gamma^2-1)^2 (c^2+a^2) + 4\gamma^2 (b^2+c^2) \right]} .$$

Hieraus entnehmen wir, dass *auf einer reellen Gerade g die Strecke DD nie unendlich gross werden, und, falls die Fläche Π^2 eine allgemeine ist, d. h. falls $k_1 \neq 0$, auch nie zu einem Punkt zusammenschrumpfen kann.*

Durch jeden Punkt auf jeder Erzeugenden gehen zwei kürzeste Transversalen zwischen ihr und je einer andern. Von besonderem Interesse sind die beiden kürzesten Transversalen durch den unendlich fernen Punkt einer Erzeugenden.

Dem unendlich fernen Punkt von g kommt der Parameter $r = \infty$ zu. Für diesen Wert des Parameters r geht die Gleichung (44.) über in:

$0 = \gamma_\sigma^2 \vartheta - 2\gamma_\sigma\gamma k_2 + \upsilon$, das ist nach (37.) des § 1:

$$(\mathbf{47.}) \qquad 0 = b^2c^2(\gamma\gamma_\sigma - 1)^2 + c^2a^2(\gamma+\gamma_\sigma)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\sigma+1)^2 \equiv \mathfrak{N}.$$

Dass diese Gleichung imaginäre Wurzeln hat, folgt sofort aus ihrer Gestalt. Es sind also die beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Lote imaginär, und die unendlich fernen Punkte derjenigen beiden Erzeugenden deren Parameter γ_σ durch Gleichung (47.) geliefert werden, sind gerade die Fusspunkte jener kürzesten Lote auf diesen. Somit *fallen die beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen ganz ins Unendliche und sind zudem imaginär.*

Die stets reellen Punkte D, $\bar{D}$ auf g haben wir als diejenigen erkannt, für welche die beiden reellen durch sie gehenden kürzesten Transversalen sich vereinigen. Da wir nun gefunden haben, dass die beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen imaginär sind, so folgt, dass jeder Punkt der unendlich langen Strecke $D.\bar{D}$ als Fusspunkt eines kürzesten Lots zu zwei Erzeugenden gehört, die imaginär sind, während die endliche Strecke $D\bar{D}$ alle diejenigen Punkte aufnimmt, durch welche zwei reelle getrennte kürzeste Lote zwischen g und je einer andern Erzeugenden gehen. Von den beiden durch den Centralpunkt ω von g gehenden kürzesten Transversalen wird die eine von der der g unendlich nahen Erzeugenden geliefert, ist also reell, und folglich muss auch die andere reell sein, d. h., *der Centralpunkt ω von g liegt stets auf der endlichen Strecke $D\bar{D}$.*

Die Parameter der beiden zum unendlich fernen Punkt der g gehörigen Erzeugenden seien mit γ_∞, $\bar{\gamma}_\infty$ bezeichnet, und zwar ergibt die sie liefernde Gleichung (47.):

$$\textbf{(48.)} \qquad \gamma_\infty,\ \bar{\gamma}_\infty = \frac{\gamma k_2 \pm i\sqrt{\vartheta v - \gamma^2 k_2^2}}{\vartheta},$$

wenn $i = \sqrt{-1}$. Die Coefficienten in der Gleichung der Ebene, die durch O parallel den beiden Erzeugenden g und g_σ aus der g-Schaar gelegt ist, sind proportional den Richtungskosinussen der kürzesten Transversale p_σ zwischen g und g_σ. Also kann die Gleichung der Ebene durch O, welche die

unendlich ferne Gerade, auf der die unendlich fernen Punkte von g und g_σ liegen, projiciert, in der Gestalt geschrieben werden:

$$0 = x p_\sigma' + y p_\sigma'' + z p_\sigma''',$$

wenn p_σ', p_σ'', p_σ''' zu den Richtungskosinussen von p_σ proportionale Werte bedeuten. Und das bleibt richtig, was für eine Erzeugende aus der g-Schaar die g_σ auch sein mag; also gilt das auch für die durch den Parameter γ_∞ festgelegte Erzeugende g_∞. Demnach ist:

(49.) $$0 = x p_\infty' + y p_\infty'' + z p_\infty'''$$

die Gleichung derjenigen Ebene durch O, deren unendlich ferne Gerade die unendlich fernen Punkte von g und g_∞ aufnimmt. Diese unendlich ferne Gerade ist aber im vorliegenden Falle die kürzeste Transversale p_∞ selbst, also können wir jene Gleichung (49.) als die Gleichung derjenigen Ebene durch O deuten, welche die kürzeste Transversale zwischen g und der durch den Parameter γ_∞ festgelegten Erzeugenden projiciert. Und folglich stellen:

$$0 = x_4,\ 0 = x p_\infty' + y p_\infty'' + z p_\infty'''$$

die Gleichungen der kürzesten Transversale p_∞ zwischen g und g_∞ dar. Für die Grössen p_∞', p_∞'', p_∞''' haben wir nach (16.) des § 1 folgende Ausdrücke:

$$p_\infty' = \frac{1}{a}(\gamma\gamma_\infty - 1) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\gamma(\gamma k_2 + i\sqrt{\vartheta\upsilon - \gamma^2 k_2^2}) - \vartheta}{\vartheta},$$

$$(49_1.)\quad p_\infty'' = -\frac{1}{b}(\gamma + \gamma_\infty) = -\frac{1}{b} \cdot \frac{\gamma k_2 + i\sqrt{\vartheta\upsilon - \gamma^2 k_2^2} + \vartheta\gamma}{\vartheta},$$

$$p_\infty''' = \frac{1}{c}(\gamma\gamma_\infty + 1) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\gamma(\gamma k_2 + i\sqrt{\vartheta\upsilon - \gamma^2 k_2^2}) + \vartheta}{\vartheta},$$

Mithin wird aus (49.):

$$0 = -\vartheta[b(xc - za) + yca\gamma] + \gamma k_2[\gamma b(xc + za) - yca] + i\sqrt{\vartheta\upsilon - \gamma^2 k_2^2}[\gamma b(xc + za) - yca].$$

Und für die andere unendlich ferne kürzeste Transversale gilt eine entsprechende Gleichung mit $-i$. Demnach wird das Paar der beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen durch die Gleichungen dargestellt:

$$0 = x_4,$$
$$0 = [-\vartheta[b(xc - za) + yca\gamma] + \gamma k_2[\gamma b(xc + za) - yca]]^2 + (\vartheta\upsilon - \gamma^2 k_2^2)[\gamma b(xc + za) - yca]^2, \text{ oder:}$$

(**50.**) $$0 = x_4,\ 0 = \vartheta[b(xc - za) + yca\gamma]^2 + \upsilon[\gamma b(xc + za) - yca]^2 - 2k_2\gamma[b(xc - za) + yca\gamma][\gamma b(xc + za) - yca],$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

$$0 = x_4,\ 0 = \mathfrak{F}_\infty.$$

Wir zeigen jetzt noch, dass die beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen die absolute Kurve berühren. Die Gleichung der Ebene, welche aus O die kürzeste Transversale p_∞ projiciert, lautet nach (49.):

$$0 = xp_\infty' + yp_\infty'' + zp_\infty'''.$$

Diese Ebene berührt den isotropen Kegel aus O:

$$0 = x^2 + y^2 + z^2$$

dann und nur dann, wenn die Beziehung statthat:

(50_1.) $$0 = p_\infty'^2 + p_\infty''^2 + p_\infty'''^2.$$

Bilden wir nun nach (49_1.) die rechts stehende Summe, so erhalten wir:

$$p_\infty'^2 + p_\infty''^2 + p_\infty'''^2 =$$
$$\frac{1}{a^2}(\gamma\gamma_\infty - 1)^2 + \frac{1}{b^2}(\gamma + \gamma_\infty)^2 + \frac{1}{c^2}(\gamma\gamma_\infty + 1)^2, \text{ also:}$$
$$a^2b^2c^2(p_\infty'^2 + p_\infty''^2 + p_\infty'''^2) =$$
$$b^2c^2(\gamma\gamma_\infty - 1)^2 + c^2a^2(\gamma + \gamma_\infty)^2 + a^2b^2(\gamma\gamma_\infty + 1)^2,$$

und dieser Ausdruck verschwindet nach (47.) und (48.). Demnach besteht in der Tat die Beziehung (50_1.), d. h. die Ebene:

$$0 = xp_\infty' + yp_\infty'' + zp_\infty'''$$

ist eine isotrope Ebene, die kürzeste Transversale p_∞ somit Tangente an die absolute Kurve. Gleiches gilt von $\bar{p}_\infty$, also *sind die beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen die von ihm aus an die absolute Kurve gelegten Tangenten.* Und damit ergibt sich weiter nach (50.), dass das durch die Erzeugende g:

$$0 = b(xc - za) - \gamma ca(b - y),$$
$$0 = \gamma b(xc + za) - ca(b + y)$$

gehende Paar isotroper Ebenen durch die Gleichung dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \vartheta[b(xc - za) - \gamma ca(b - y)]^2 \\ (50_2.) \quad & + \upsilon[\gamma b(xc + za) - ca(b + y)]^2 \\ & - 2k_2\gamma[b(xc - za) - \gamma ca(b - y)][\gamma b(xc + za) - ca(b + y)]. \end{aligned}$$

Interessant sind aber auch die beiden zum Centralpunkt einer Erzeugenden gehörigen kürzesten Transversalen.

Die durch den Centralpunkt ω der Erzeugenden g gehenden kürzesten Transversalen seien p_ω, p_ω, und zwar werde die erstere von der der g unendlich nahen Erzeugenden, die andere hingegen von der im allgemeinen von g verschiedenen Erzeugenden g_ω geliefert. p_ω und $\bar{p}_\omega$ liegen beide in der auf g in ω normalen Ebene. Dass $\bar{p}_\omega$ aber auch in der Berührungsebene von ω liegt, soll im Folgenden gezeigt werden.

Als zu den Richtungskosinussen von $\bar{p}_\omega$ proportionale Werte erhalten wir nach (16.) des § 1:

$$(51.) \qquad p_\omega' = \frac{1}{a}(\gamma^2 - 1),\ \bar{p}_\omega'' = -\frac{2}{b}\gamma,\ \bar{p}_\omega''' = \frac{1}{c}(\gamma^2 + 1).$$

Nun lautet mit ξ, η, ζ als laufenden Coordinaten die Gleichung der Berührungsebene in ω:

$$0 = \frac{\omega'}{a^2}\xi + \frac{\omega''}{b^2}\eta - \frac{\omega'''}{c^2}\zeta - 1.$$

Bilden wir die Summe:

$$\frac{\omega'}{a^2}p_\omega' + \frac{\omega''}{b^2}p_\omega'' - \frac{\omega'''}{c^2}\bar{p}_\omega''',$$

so erhalten wir hierfür unter Beachtung der Formeln (34.) des § 1:

$$\frac{2\gamma(\gamma^4 - 1)[b^2 + c^2 - (c^2 + a^2) - (b^2 - a^2)]}{b^2c^2(\gamma^2 - 1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2 + 1)^2} = 0.$$

Die kürzeste Transversale p_ω zwischen g und ihrer Nachbarerzeugenden liegt also in der Tat in der Berührungsebene des Centralpunktes ω von g, ist demnach die Schnittlinie dieser Ebene mit der in ω zu g normalen Ebene.

Substituieren wir in die Gleichung (44.) für r den den Centralpunkt ω festlegenden Parameter r_ω, so erhalten wir aus ihr [ausser $\gamma_c = \gamma$] gerade den die Erzeugende g_ω bestimmenden Parameter γ_ω, nämlich:

$$\gamma\gamma_\omega = \frac{r_\omega(\gamma^2 + 1)\upsilon - \gamma^2 a b c k_1}{r_\omega(\gamma^2 + 1)\vartheta + \gamma^2 a b c k_1}.$$

Tragen wir hierin für r_ω den in (34.) des § 1 angegebenen Wert ein, so kommt:

$$(52.)\quad \gamma\gamma_\omega = \frac{2\upsilon c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) - k_1[b^2c^2(\gamma^2 - 1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2 + 1)^2]}{-2\vartheta c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) + k_1[b^2c^2(\gamma^2 - 1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2 + 1)^2]}.$$

Beachten wir, dass:

$$2\upsilon = k_3(\gamma^2 + 1) - k_1(\gamma^2 - 1),\quad 2\vartheta = k_3(\gamma^2 + 1) + k_1(\gamma^2 - 1),$$

so lässt sich der Bruch in (52.) mit $(\gamma^2 + 1)$ kürzen und es ergibt sich:

$$(\mathbf{53.})\quad \gamma\gamma_\omega = \frac{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) + k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)}{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) - k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)}.$$

Diese Beziehung gibt uns also den Parameter γ_ω derjenigen im allgemeinen von g verschiedenen Gerade g_ω, welche nach dem Centralpunkt ω von g ihr kürzestes Lot mit g hinsendet. Zu jeder Gerade g gibt es nur eine solche Gerade g_ω. Betrachten wir in der Beziehung (53.) γ_ω als gegeben und γ als gesucht, so lehrt der Grad 3 in γ, dass *unter den kürzesten Loten zwischen einer festen Gerade g_ω und den andern g sich im allgemeinen drei finden, welche die betreffende g im Centralpunkt treffen.*

Die Gleichungen der kürzesten Transversale p_ω lassen sich in die Gestalt setzen:

$$(45.) \qquad a\,\frac{x-\omega'}{\gamma\gamma_\omega-1} = -\,b\,\frac{y-\omega''}{\gamma+\gamma_\omega} = c\,\frac{z-\omega'''}{\gamma\gamma_\omega+1}.$$

Insbesondere lautet die Gleichung der Horizontalprojektion von p_ω:

$$(55.) \qquad a\,\frac{x-\omega'}{\gamma\gamma_\omega-1} = -\,b\,\frac{y-\omega''}{\gamma+\gamma_\omega}.$$

Nun erhalten wir nach (53.):

$$\gamma\gamma_\omega - 1 = \frac{2k_1a^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)}{k_3c^2(b^2-a^2)(\gamma^2-1) - k_1a^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)},$$

$$\gamma+\gamma_\omega = \frac{k_2b^2(c^2+a^2)(\gamma^4-1)}{\gamma[k_3c^2(b^2-a^2)(\gamma^2-1) - k_1a^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)]},$$

folglich wird aus (55.):

(56.)
$$0 = [x\,b\,(c^2k_1 - a^2k_3)(\gamma^2-1) + 2ya\gamma(b^2k_3 + c^2k_2)][b^2c^2(\gamma^2-1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2+1)^2] - 2k_3ab\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$

was wir abkürzend schreiben wollen:

$$0 = p_\omega(x, y).$$

§ 3.

Der Ort der Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen einer Gerade g und sämtlichen andern der Regelschaar auf diesen.

Der Ort der kürzesten Transversalen zwischen einer Gerade g und sämtlichen andern der Regelschaar.

Jede Gerade der Regelschaar gibt zur Entstehung zweier Örter Veranlassung, eines Ortes erster Stufe von Punkten und eines Ortes erster Stufe von Strahlen. Jenen bildet das

auf der Regelschaar gelegene Continuum der Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen ihr und den andern Geraden, diesen das Continuum der kürzesten Transversalen zwischen ihr und den andern Geraden der Regelschaar. Über den ersten Ort gibt uns sofort die in (41.) des § 1 hergeleitete Beziehung Aufschluss. Sie besagt: *Die auf den Geraden g_σ der Regelschaar gelegenen Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen g_σ und der festen Gerade g fallen sämtlich in die Ebene*:

(**57.**) $0 = bck_1(\gamma^2-1)x + 2cak_2\gamma y - abk_3(\gamma^2+1)z,$

das ist, ausführlich geschrieben:

$$0 = bc(b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2)(\gamma^2-1)x+2ca(b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)\gamma y \\ -ab(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)(\gamma^2+1)z.$$

Wir haben also eine *ebene Kurve* vor uns, und da sie auf der Regelschaar liegt, so ist sie ein Kegelschnitt. Er heisse kurz der der Gerade g zugeordnete *Fusspunktkegelschnitt* $\mathfrak{K}$ und seine Ebene werde mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Diese geht, wie ihre Gleichung (57.) lehrt, durch den Mittelpunkt der die Regelschaar tragenden Fläche H^2. Sie geht aber auch durch den Centralpunkt ω von g. Denn substituieren wir in der Summe:

$$bck_1(\gamma^2-1)x + 2cak_2\gamma y - abk_3(\gamma^2+1)z$$

an Stelle von x, y, z die Coordinaten des Centralpunkts ω, so erhalten wir, wenn sogleich der allen Gliedern gemeinsame Faktor:

$$\frac{2abc\gamma(\gamma^4-1)}{b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2}$$

weggelassen wird, den Ausdruck:

$a^2(b^2+c^2)k_1 + b^2(c^2+a^2)k_2 - c^2(b^2-a^2)k_3$, das ist:

$a^2(b^2k_3+c^2k_2) + b^2(c^2k_1 - a^2k_3) - c^2(b^2k_1+a^2k_2) = 0.$

Der Centralpunkt von g liegt also in der Tat in der Ebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{K}$, und da er auch auf der Fläche H^2 liegt, so geht $\mathfrak{K}$ selbst durch ihn. Und folglich nimmt $\mathfrak{K}$ von dem kürzesten Lot p_ω sowohl den auf g gelegenen Fusspunkt ω als auch den im allgemeinen von ihm verschiedenen auf

g_ω gelegenen Fusspunkt $\mathfrak{P}_\omega$ auf, d. h., p_ω fällt ganz in die Ebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{K}$, ist mithin der Schnitt dieser Ebene mit der in ω zu g normalen Ebene. Im vorigen § haben wir bereits erkannt, dass die andere zum Centralpunkt ω gehörige kürzeste Transversale p_ω die Schnittlinie der Berührungsebene in ω mit der zu g in ω normalen Ebene ist, sie fällt also, solange die Ebene $\mathfrak{E}$ nicht selbst normal ist zu g, nicht in die Ebene $\mathfrak{E}$ hinein. Und die *Ebene* $\mathfrak{E}$ *ist im allgemeinen nicht normal zur Gerade g.* Denn da die Grössen

$$\frac{\gamma^2-1}{bc\gamma},\quad -\frac{2}{ca},\quad -\frac{\gamma^2+1}{ab\gamma}$$

zu den Richtungskosinussen von g proportional sind, so müssten, wenn $\mathfrak{E}$ normal zu g wäre, folgende beiden Beziehungen bestehen:

$$\frac{bk_1(\gamma^2-1)}{ak_2}=-\frac{a(\gamma^2-1)}{b},\quad -\frac{bk_3(\gamma^2+1)}{ck_2}=\frac{c(\gamma^2+1)}{b},\text{ das ist:}$$

58.) $\qquad 0=(\gamma^2-1)(b^2-a^2)k_3,\ 0=(\gamma^2+1)(b^2+c^2)k_1.$

Die Summe k_3 sowie b^2+c^2 ist stets von Null verschieden. Demnach wird für ein Rotationshyperboloid die erste Beziehung von selbst erfüllt, und die zweite fordert dann: $\gamma^2+1=0$. Bei einem Rotationshyperboloide existieren also zwei imaginäre Geraden in jeder Schaar, welche normal stehen auf den Ebenen der ihnen zugehörigen Fusspunktkegelschnitte. Für jedes andere Hyperboloid jedoch ist die Grösse $b^2-a^2\gtrless 0$, somit kann die erste Beziehung nur durch $\gamma^2-1=0$ und die zweite durch $k_1=0$ erfüllt werden. Die Grösse k_1 verschwindet aber nur für das orthogonale Hyperboloid, und bei diesem finden sich, wie im § 6 gezeigt werden wird, in jeder Schaar zwei reelle Erzeugende, für welche Normalität mit den Ebenen der zu ihnen gehörigen Fusspunktkegelschnitte besteht. Bei einem allgemeinen Hyperboloid ist mithin die Ebene $\mathfrak{E}$ nicht normal zu g.

Der Fusspunktkegelschnitt lässt uns noch eine weitere [negative] Eigenschaft bezüglich der Lage des ganz in seine

Ebene fallenden kürzesten Lots erkennen. Aus den Formeln (34.) des § 1 entnehmen wir, dass:
$2a^3(b^2+c^2)(\gamma^2+1)\gamma, b^3(c^2+a^2)(\gamma^4-1), 2c^3(b^2-a^2)(\gamma^2-1)\gamma$
zu den Richtungskosinussen des Strahls $O\omega$ proportionale Grössen sind; betrachten wir hierzu die zu den Richtungskosinussen von g proportionalen Grössen:

$$\frac{\gamma^2-1}{bc\gamma}, \quad -\frac{2}{ca}, \quad -\frac{\gamma^2+1}{ab\gamma},$$

so lehrt der Wert der Summe:

$$\frac{2(\gamma^4-1)}{abc}\left\{a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(b^2-a^2)\right\}=$$

$$-\frac{2(\gamma^4-1)}{abc}(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$

dass zwar beim Rotationshyperboloid stets der den Centralpunkt ω von O aus projicierende Strahl auf g senkrecht steht, dass hingegen beim gewöhnlichen Hyperboloide jener Strahl im allgemeinen nicht normal ist zu g. Mithin geht auch das kürzeste Lot p_ω, das ganz in die Ebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{K}$ fällt, im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt O des Hyperboloids und trifft daher die Gerade g_ω im allgemeinen nicht in ihrem Centralpunkte. Denn träfe p_ω die g_ω in ihrem Centralpunkt, so müsste p_ω notwendig auf der Schnittlinie der zu g und g_ω gehörigen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_\omega$ zu liegen kommen, also den Mittelpunkt O der Fläche aufnehmen, was aber, wie eben nachgewiesen, im allgemeinen nicht stattfindet. Das kürzeste Lot p_ω schneidet demnach die Gerade g_ω im allgemeinen nicht in ihrem Centralpunkt und verbindet daher auch nicht die beiden Schnittpunkte der zu g und g_ω gehörigen Fusspunktkegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_\omega$.

Über die Art des Fusspunktkegelschnitts $\mathfrak{K}$ gibt uns unmittelbar das in (47.) des § 2 erlangte Ergebnis Auskunft. Auf $\mathfrak{K}$ müssen nämlich die unendlich fernen Punkte derjenigen beiden imaginären Erzeugenden liegen, deren Parameter γ_∞, γ_∞ durch die Gleichung (47.) geliefert werden. Diese beiden Schnitte von $\mathfrak{K}$ mit der unendlich fernen Ebene

sind also imaginär, und weitere Schnitte von $\mathfrak{K}$ mit der unendlich fernen Ebene kann es nicht geben, $\mathfrak{K}$ *ist demnach eine Ellipse.*

Die in (57.) dargestellte Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{K}$ bleibt unverändert, wenn in ihr γ mit $-\gamma$ und b mit $-b$ vertauscht wird; d. h., *zu der der Gerade g parallelen Gerade l aus der Leitschaar gehört dieselbe Ebene und mithin auch derselbe Fusspunktkegelschnitt.*

Rekapitulieren wir: „*Der Ort der Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen einer Gerade g und sämtlichen andern der Regelschaar auf diesen ist ein ganz im Endlichen gelegener Kegelschnitt, der die g im Centralpunkt* ω *trifft und dessen Mittelpunkt in den der Fläche fällt. Zu der der Gerade g parallelen Gerade l aus der Leitschaar gehört derselbe Kegelschnitt. Er heisse kurz der der Gerade g zugeordnete Fusspunktkegelschnitt* $\mathfrak{K}$ *und seine Ebene werde mit* $\mathfrak{E}$ *bezeichnet. In sie schneidet die zu g in* ω *normale Ebene die eine der beiden von* $\dot{\omega}$ *ausstrahlenden kürzesten Transversalen ein, während die andere der Schnitt der zu g in* ω *normalen Ebene mit der Berührungsebene der Fläche in* ω *ist, also nicht in die Ebene* $\mathfrak{E}$ *hineinfällt, es sei denn, dass* $\mathfrak{E}$ *normal ist zu g, was aber bei einer allgemeinen Fläche nicht eintritt.*“

Der Grad 2 der zu einer Gerade g der Regelschaar gehörigen Fusspunktkurve orientiert uns sofort über den Grad der von dem Continuum der gemeinsamen kürzesten Transversalen zwischen der Gerade g und sämtlichen andern gebildeten Regelfläche. Da nämlich durch jeden Punkt von g zwei kürzeste Transversalen gehen und sich in der Leitschaar zwei Geraden finden, auf denen je ein kürzestes Lot zwischen der Gerade g und noch einer andern liegt[1]), so besteht der Schnitt der gesuchten Regelfläche mit der Fläche H^2 aus einer Kurve 6. Ordnung, die sich zusammensetzt aus: 1) dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; 2) der Doppelgerade g; 3) denjenigen beiden Geraden aus der Leitschaar, auf denen je ein kürzestes Lot

[1]) S. Sturm, Liniengeometrie, Band I, Nr. 135, 136.

zwischen der Gerade g und noch einer andern liegt. *Folglich hat die gesuchte Regelfläche den Grad 3.* Sie werde mit R bezeichnet. Dass *auf ihr die Gerade g doppelte Leitlinie ist,* haben wir bereits erkannt. Neben dieser doppelten Leitlinie *besitzt R noch eine einfache Leitlinie: die Axe des Büschels der zur g normalen Ebenen,* q_∞. Denn jede Ebene durch g schneidet $\mathfrak{K}$ ausser in dem Centralpunkt ω von g nur noch einmal, also nimmt jede Ebene durch g eine und und nur eine kürzeste Transversale zwischen g und einer bestimmten andern Gerade der Regelschaar auf; der unendlich ferne Punkt dieser kürzesten Transversale zwischen g und einer bestimmten andern Gerade der Regelschaar ist in Bezug auf die absolute Kurve konjugiert zu dem unendlich fernen Punkt von g, und durch jeden Punkt der Polare q_∞ des unendlich fernen Punkts von g in Bezug auf die absolute Kurve geht eine und nur eine kürzeste Transversale zwischen g und einer bestimmten andern Gerade. Mithin ist q_∞ in der Tat einfache Leitlinie für die Regelfläche R. Und den Grad 3 von R erkennen wir nochmals daran, dass jeder Schnitt mit einer zur g normalen Ebene eine [in drei Geraden zerfallende] Kurve dritter Ordnung ist.

Der Schnitt von R mit der Ebene $\mathfrak{E}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ besteht aus $\mathfrak{K}$ und der in $\mathfrak{E}$ fallenden kürzesten Transversale p_ω. Er sei mit $C^3_{\mathfrak{E}}$ bezeichnet. Die Gleichung der Horizontalprojektion von p_ω ist bereits in (56.) des § 2 ermittelt, nämlich:

$$\begin{aligned}(\mathbf{59.}) \quad 0 = {} & [x\,b\,(c^2k_1 - a^2k_3)\,(\gamma^2-1) + 2\,y\,a\gamma\,(b^2k_3 + c^2k_2)] \times \\ & \times [b^2c^2\,(\gamma^2-1)^2 + 4\,c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2+1)^2] \\ & - 2\,a\,b\,k_3\,\gamma\,(\gamma^4-1)\,(b^2-a^2)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2) \\ \equiv {} & p_\omega\,(x,y).\end{aligned}$$

Um zur Gleichung der Horizontalprojektion von $\mathfrak{K}$ zu gelangen, haben wir aus der Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$:

$$0 = b\,c\,k_1(\gamma^2 - 1)x + 2\,c\,a\,k_2\,\gamma\,y - a\,b\,k_3(\gamma^2+1)\,z$$

und der Gleichung der Fläche H^2:

$$0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

die Coordinate z zu eliminieren. Diese Elimination führt zu:

$$0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{[bk_1(\gamma^2 - 1)x + 2ak_2\gamma y]^2}{a^2b^2k_3{}^2(\gamma^2+1)^2} - 1,$$

das ist:

(60.) $0 = x^2b^2[k_3{}^2(\gamma^2+1)^2 - k_1{}^2(\gamma^2-1)^2] + y^2a^2[k_3{}^2(\gamma^2+1)^2 - 4k_2{}^2\gamma^2]$
$$- 4xyabk_1k_2(\gamma^2-1)\gamma - a^2b^2k_3{}^2(\gamma^2+1)^2,$$

oder abgekürzt:

$$0 = \mathfrak{K}(x, y).$$

Folglich kann die Gleichung der Horizontalprojektion von $C^3_{\mathfrak{G}}$ in folgender Form geschrieben werden:

61.) $$0 = p_\omega(x, y) \cdot \mathfrak{K}(x, y),$$

oder nach Potenzen der Coordinaten geordnet:

$$0 = M_0x^3 + M_1y^3 + M_2x^2y + M_3xy^2 + M_4x^2 + M_5y^2 + M_6xy + M_7x + M_8y + M_9.$$

Der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der Regelfläche R werde mit C^3_∞ bezeichnet. Er ist eine in drei Geraden zerfallende Kurve dritter Ordnung: die eine ist die Axe des Büschels der zu g normalen Ebenen, q_∞, die beiden andern sind die zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen. Die Gleichungen von q_∞ sind:

(62.) $0 = x_4,\ 0 = -xa(\gamma^2 - 1) + 2yb\gamma + zc(\gamma^2 + 1);$

denn die Gleichung der durch O normal zu g gelegten Ebene lautet:

$$0 = xg' + yg'' + zg''',$$

woraus sich die zweite Gleichung in (62.) ergibt, wenn für die Richtungskosinusse g', g'', g''' ihre Werte eingesetzt werden. Abgekürzt sollen die Gleichungen von q_∞ geschrieben werden:

$$0 = x_4,\ 0 = Q_\infty$$

Als Gleichungen des Paares der beiden zum unendlich fernen Punkt von g gehörigen kürzesten Transversalen hatten wir nach (50.) des § 2:

$$0 = x_4,\ 0 = \mathfrak{F}_\infty,$$

folglich wird die Kurve dritter Ordnung C^3_∞ dargestellt durch:

(63.) $$0 = x_4,\ 0 = Q_\infty \cdot \mathfrak{F}_\infty.$$

Die Regelfläche R enthält die Doppelgerade g sowie die beiden ebenen Kurven dritter Ordnung $C^3_\mathfrak{E}$ und C^3_∞. Mit diesen Elementen gibt es nur eine Fläche dritter Ordnung. Denn gesetzt, es gäbe durch die Kurven $C^3_\mathfrak{E}$ und C^3_∞ noch eine zweite Fläche dritter Ordnung mit g als Doppelgerade, etwa R_0, so hätten die beiden Flächen R und R_0, da die Doppelgerade g bei der Durchschnittskurve beider Flächen 4mal zählt, eine Durchschnittskurve 10. Ordnung, was unmöglich ist, es sei denn, dass R_0 mit R vollständig zusammenfällt. Durch die beiden ebenen Kurven dritter Ordnung $C^3_\mathfrak{E}$ und C^3_∞ ist also nur eine kubische Fläche mit der Doppelgerade g möglich. Mit der Ermittelung ihrer Gleichung beschäftigen wir uns im Folgenden.

Nach (2.) des § 1 wollen wir die Gleichungen einer Gerade g der Regelschaar schreiben:

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv b\,(xc - za) - \gamma ca\,(b - y) = 0, \\ G_2 &\equiv \gamma b\,(xc + za) - ca\,(b + y) = 0, \end{aligned} \tag{64.}$$

oder, wenn wir uns homogen gemachter Cartesischer Coordinaten bedienen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &\equiv b\,(x_1 c - x_3 a) - \gamma ca\,(x_4 b - x_2) = 0, \\ \mathfrak{G}_2 &\equiv \gamma b\,(x_1 c + x_3 a) - ca\,(x_4 b + x_2) = 0. \end{aligned}$$

Bedeuten

$$\alpha_{11},\ \alpha_{22},\ \alpha_{12},\ \beta_{11},\ \beta_{22},\ \beta_{12}$$

sechs von Coordinaten freie Grössen, so ist:

$$\begin{aligned} 0 = Q_\infty\,&(G_1^2\alpha_{11} + G_2^2\alpha_{22} + G_1 G_2 \alpha_{12}) \\ &+ G_1^2\beta_{11} + G_2^2\alpha_{22} + G_1 G_2 \beta_{12}, \end{aligned} \tag{65.}$$

oder in homogenen Coordinaten:

$$\begin{aligned} 0 = Q_\infty\,&(\mathfrak{G}_1^2\alpha_{11} + \mathfrak{G}_2^2\alpha_{22} + \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \alpha_{12}) \\ &+ x_4(\mathfrak{G}_1^2\beta_{11} + \mathfrak{G}_2^2\beta_{22} + \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \beta_{12}) \end{aligned}$$

unzweifelhaft die Gleichung einer kubischen Fläche. Diese teilt mit der Fläche R die Eigenschaft, dass auf ihr die Gerade:

$$0 = x_4, \quad 0 = Q_\infty$$

einfach und die Gerade:

$$0 = \mathfrak{G}_1, \quad 0 = \mathfrak{G}_2$$

doppelt liegt; das heisst, auf der durch (65.) dargestellten kubischen Fläche ist g eine Doppelgerade und q_∞ eine einfache Gerade. Als Schnitt mit der unendlich fernen Ebene ergibt die in (65.) dargestellte kubische Fläche:

$$0 = x_4, \; 0 = Q_\infty(\mathfrak{G}_1{}^2\alpha_{11} + \mathfrak{G}_2{}^2\alpha_{22} + \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\alpha_{12}),$$ das ist

(66.) $$0 = x_4,$$

$$0 = Q_\infty[[b(x_1c - x_3a) + x_2ca\gamma]^2\alpha_{11} + [\gamma b(x_1c + x_3a) - x_2ca]^2\alpha_{22} + [b(x_1c - x_3a) + x_2ca\gamma][\gamma b(x_1c + x_3a) - x_2ca]\alpha_{12}].$$

Ein Vergleich mit dem in (50.) des § 2 für J_∞ erlangten Ausdruck lehrt, dass, wenn wir setzen:

$$\alpha_{11} = \vartheta, \; \alpha_{22} = \upsilon, \; \alpha_{12} = -2k_2\gamma,$$

dann die Gleichung (66.) übergeht in:

$$0 = x_4, \quad 0 = Q_\infty \cdot \mathfrak{F}_\infty.$$

Damit haben wir bis jetzt folgendes Ergebnis:

Die durch:

(67.) $$0 = Q_\infty(G_1{}^2\vartheta + G_2{}^2\upsilon - 2G_1G_2\gamma k_2) + G_1{}^2\beta_{11} + G_2{}^2\beta_{22} + G_1G_2\beta_{12}$$

dargestellte kubische Fläche ist von der Eigenschaft, dass die Gerade g auf ihr Doppelgerade, hingegen die Axe des Büschels der zu g normalen Ebenen einfache Gerade ist, und dass ferner ihr Schnitt mit der unendlich fernen Ebene genau die Curve $C^3{}_\infty$ ist, in welcher die Fläche R von der unendlich fernen Ebene getroffen wird.

Der Schnitt der Ebene $\mathfrak{E}$ mit der kubischen Fläche (67.) sei die Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{C}^3\mathfrak{E}$. Gelingt es nun, für die drei Grössen β_{11}, β_{22}, β_{12} solche Werte anzugeben, dass die Kurve $\mathfrak{C}^3\mathfrak{E}$ identisch wird mit der Kurve $C^3\mathfrak{E}$, so leistet unsere kubische Fläche, was überhaupt von ihr verlangt werden kann, nämlich: die Gerade g doppelt und die Axe des Büschels der zu g normalen Ebenen einfach zu ent-

halten, ferner als Schnitt mit der unendlich fernen Ebene die C^3_∞ und als Schnitt mit der Ebene $\mathfrak{E}$ die $C^3\mathfrak{E}$ zu ergeben. Und eine solche kubische Fläche ist identisch mit der Fläche R.

Um die Identität der beiden in $\mathfrak{E}$ liegenden Kurven $\mathfrak{C}^3\mathfrak{C}$ und $C^3\mathfrak{E}$ zu erkennen, genügt es, den Nachweis zu führen, dass die beiden Kurven in ihren Horizontalprojektionen übereinstimmen.

Aus der Gleichung (67.) und der Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$ in (57.):

$$(68.)\quad 0 = bck_1(\gamma^2 - 1)x + 2cak_2\gamma y - abk_3(\gamma^2 + 1)z$$

eliminieren wir z und gelangen so zur Gleichung der Horizontalprojektion des Schnitts der Ebene $\mathfrak{E}$ mit der in (67.) dargestellten kubischen Fläche. Tragen wir den aus (68.) für z sich ergebenden Wert:

$$z = c\,\frac{bk_1(\gamma^2 - 1)x + 2ak_2\gamma y}{abk_3(\gamma^2 + 1)}$$

in die Gleichung (67.) ein, und entfernen wir sogleich die Nenner, so kommt:

$$(69.)\quad \begin{aligned} 0 = \bar{Q}_\infty[\bar{G}_1{}^2\vartheta + \bar{G}_2{}^2\upsilon - 2\bar{G}_1\bar{G}_2k_2\gamma] \\ + abk_3(\bar{G}_1{}^2\beta_{11} + \bar{G}_2{}^2\beta_{22} + \bar{G}_1\bar{G}_2\beta_{12}), \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\bar{Q}_\infty = xb(c^2k_1 - a^2k_2)(\gamma^2 - 1) + 2ya\gamma(b^2k_3 + c^2k_2),$$

$$\bar{G}_1 = xb[k_3(\gamma^2+1) - k_1(\gamma^2-1)] + ya\gamma[k_3(\gamma^2+1) - 2k_2] - abk_3\gamma(\gamma^2+1),$$

$$\bar{G}_2 = xb\gamma[k_3(\gamma^2+1) + k_1(\gamma^2-1)] + ya[-k_3(\gamma^2+1) + 2k_2\gamma^2] - abk_3(\gamma^2+1).$$

Nach Potenzen der Coordinaten geordnet soll Gleichung (69.) so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{M}_0x^3 + \mathfrak{M}_1y^3 + \mathfrak{M}_2x^2y + \mathfrak{M}_3xy^2 + \mathfrak{M}_4x^2 + \mathfrak{M}_5y^2 \\ + \mathfrak{M}_6xy + \mathfrak{M}_7x + \mathfrak{M}_8y + \mathfrak{M}_9. \end{aligned}$$

Die Grössen β gehen nur in die sechs letzten Coefficienten ein, nicht aber in die vier ersten. Es sind also die Coefficienten $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ unabhängig von den Grössen β, und

es soll im Folgenden gezeigt werden, dass diese vier Coefficienten genau mit den entsprechenden in der Gleichung (61.) übereinstimmen.

Nach Gleichung (61.) ergibt sich:

$$(70.)\qquad \frac{M_0}{b^3(c^2k_1 - a^2k_3)(\gamma^2 - 1)} =$$

$$[(\gamma^2+1)^2k_3^2-(\gamma^2-1)^2k_1^2][b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2] =$$
$$[(\gamma^2+1)^2(k_3^2-k_1^2)+4\gamma^2k_1^2][b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2+4c^2(a^2-b^2)\gamma^2] =$$
$$(\gamma^2+1)^4(k_3^2-k_1^2)(c^2+a^2)b_2 + 16\gamma^4k_1^2c^2(a^2-b^2)$$
$$+ 4\gamma^2(\gamma^2+1)^2[-(k_3^2-k_1^2)(b^2-a^2)c^2 + k_1^2b^2(c^2+a^2)];$$

$$(71.)\qquad \frac{M_1}{2a^3\gamma(b^2k_3 + c^2k_2)} =$$

$$[(\gamma^2+1)^2k_3^2 - 4\gamma^2k_2^2][b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2] =$$
$$(\gamma^2+1)^4(c^2+a^2)b^2k_3^2 + 16\gamma^4c^2k_2^2(b^2-a^2)$$
$$+ 4\gamma^2(\gamma^2+1)^2[-k_3^2c^2(b^2-a^2) - k_2^2b^2(c^2+a^2)].$$

Von der in eckiger Parenthese eingeschlossenen Summe in der Gleichung (69.) lautet der Coefficient

1) von x^2:

$$b^2\{\vartheta[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]^2+\upsilon\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2$$
$$-2k_2\gamma^2[k_3^2(\gamma^2+1)^2-k_1^2(\gamma^2-1)^2]\} =$$
$$b^2\{\vartheta[(\gamma^2+1)(k_3-k_1)+2k_1]^2+\upsilon\gamma^2[(\gamma^2+1)(k_3+k_1)-2k_1]^2$$
$$-2k_2\gamma^2[(\gamma^2+1)^2(k_3^2-k_1^2)+4\gamma^2k_1^2]\} =$$
$$b^2\{(\gamma^2+1)^2[(k_3^2+k_1^2)(\vartheta+\upsilon\gamma^2)+2k_1k_3(\upsilon\gamma^2-\vartheta)]+4k_1^2(\vartheta+\upsilon\gamma^2)$$
$$+4k_1(\gamma^2+1)[(k_3(\vartheta-\upsilon\gamma^2)-k_1(\vartheta+\upsilon\gamma^2)]-2k_2\gamma^2[(\gamma^2+1)^2(k_3^2-k_1^2)$$
$$+4\gamma^2k_1^2]\} =$$
$$b^2\{(\gamma^2+1)^2[(k_3^2+k_1^2)[2k_1\gamma^2+c^2a^2(\gamma^2+1)^2]+2k_1k_3c^2a^2(\gamma^4-1)]$$
$$+4k_1^2[2k_1\gamma^2+c^2a^2(\gamma^2+1)^2]-2k_2\gamma^2[(\gamma^2+1)^2(k_3^2-k_1^2)+4\gamma^2k_1^2]$$
$$+4k_1(\gamma^2+1)[-k_3c^2a^2(\gamma^4-1)-k_1[2k_1\gamma^2+c^2a^2(\gamma^2+1)^2]]\} =$$
$$b^2\{(\gamma^2+1)^4(k_3^2-k_1^2)(c^2+a^2)b^2-16\gamma^4k_1^2c^2(b^2-a^2)$$
$$+4\gamma^2(\gamma^2+1)^2[-(k_3^2-k_1^2)(b^2-a^2)c^2+k_1^2b^2(c^2+a^2)]\},$$

das ist nach (70.)

$$(72.) = b^2[(\gamma^2+1)^2k_3^2 - (\gamma^2-1)^2k_1^2][b^2c^2(\gamma^2-1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2+1)^2];$$

2) von y^2:

$$a^2\big[\vartheta\gamma^2[k_3(\gamma^2+1) - 2k_2]^2 + \upsilon[-k_3(\gamma^2+1) + 2k_2\gamma^2]^2 - 2k_2\gamma^2[k_3(\gamma^2+1) - 2k_2][-k_3(\gamma^2+1) + 2k_2\gamma^2]\big] =$$

$$a^2\big[k_3^2(\gamma^2+1)^2(\vartheta\gamma^2+\upsilon) - 4k_2k_3\gamma^2(\gamma^2+1)(\vartheta+\upsilon) + 4k_2^2\gamma^2(\vartheta+\upsilon\gamma^2) - 2k_2\gamma^2[(\gamma^2+1)^2(-k_3+2k_2)k_3 - 4k_2^2\gamma^2]\big] =$$

$$a^2\big[k_3^2(\gamma^2+1)^2[b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2 - 2k_1\gamma^2] - 4k_3^2k_2\gamma^2(\gamma^2+1)^2 + 8k_2^3\gamma^4 + 4k_2^2\gamma^2[2k_1\gamma^2 + c^2a^2(\gamma^2+1)^2] - 2k_2k_3\gamma^2(\gamma^2+1)^2(-k_3+2k_2)\big] =$$

$$a^2\big[(\gamma^2+1)^4(c^2+a^2)b^2k_3^2 + 16\gamma^4(b^2-a^2)c^2k_2^2 + 4\gamma^2(\gamma^2+1)^2[-(b^2-a^2)c^2k_3^2 - (c^2+a^2)b^2k_2^2]\big],$$

das ist nach (71.)

$$(73.) = a^2[(\gamma^2+1)^2k_3^2 - 4\gamma^2k_2^2][b^2c^2(\gamma^2-1)^2 + 4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2+1)^2];$$

3) von xy:

$$2abc\gamma\big[\vartheta[k_3(\gamma^2+1) - k_1(\gamma^2-1)][k_3(\gamma^2+1) - 2k_2] + \upsilon[k_3(\gamma^2+1) + k_1(\gamma^2-1)][-k_3(\gamma^2+1) + 2k_2\gamma^2] - k_2[k_3(\gamma^2+1) - k_1(\gamma-1)][-k_3(\gamma^2+1) + 2k_2\gamma^2] - k_2\gamma^2[k_3(\gamma^2+1) + k_1(\gamma^2-1)][k_3(\gamma^2+1) - 2k_2]\big] =$$

$$2abc\gamma\big[k_3^2(\gamma^2+1)^2(\vartheta-\upsilon) - k_3k_1(\gamma^4-1)(\vartheta+\upsilon) + 2k_2k_3(\gamma^2+1)(\upsilon\gamma^2-\vartheta) + 2k_1k_2(\gamma^2-1)(\upsilon\gamma^2+\vartheta) - k_2(\gamma^2-1)[k_3^2(\gamma^2+1)^2 + k_3k_1(\gamma^2+1)^2 - 4k_1k_2\gamma^2]\big] =$$

$$2abc\gamma(\gamma^2-1)\big[k_3^2k_1(\gamma^2+1)^2 - k_3^2k_1(\gamma^2+1)^2 + 2k_2k_3c^2a^2(\gamma^2+1)^2 + 4k_1k_2^2\gamma^2 + 2k_1k_2[2k_1\gamma^2 + c^2a^2(\gamma^2+1)^2] - k_2k_3(\gamma^2+1)^2(k_3+k_1)\big] =$$

$$(74.) \quad -4k_1k_2abc\gamma(\gamma^2-1)[(\gamma^2+1)^2(c^2+a^2)b^2 - 4\gamma^2c^2(b^2-a^2)].$$

Die Ergebnisse in (70.)—(74.) lehren, dass:

$$(75.) \quad \mathfrak{M}_0 = M_0, \quad \mathfrak{M}_1 = M_1, \quad \text{und demnach auch:} \quad \mathfrak{M}_2 = M_2, \quad \mathfrak{M}_3 = M_3.$$

Nunmehr wollen wir drei die Grössen β_{11}, β_{22}, β_{12} enthaltende Coefficienten aus der Gleichung (69.) herausgreifen, etwa die mit x^2 und y behafteten und das von den Coordi-

naten freie Glied, und uns die entsprechenden Coefficienten in der Gleichung (61.) aufsuchen.

Nach (69.) erhalten wir:

$$\frac{\mathfrak{M}_4}{a\,b^3\,k_3} =$$

$$2\gamma(\gamma^4-1)(c^2k_1-a^2k_3)[-\vartheta[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]-\upsilon[k_3(\gamma^2-1)+k_1(\gamma^2-1)] + k_2[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]]$$
$$+\beta_{11}[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]^2+\beta_{22}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2 + \beta_{22}\gamma[k_3^2(\gamma^2+1)^2-k_1^2(\gamma^2-1)^2],$$

$$\frac{\mathfrak{M}_8}{2\,k_3^2a^3b^2(\gamma^2+1)} =$$

$$\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)(\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2)-\beta_{11}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2] - \beta_{22}[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]-\beta_{12}k_2\gamma(\gamma^2-1),$$

$$\mathfrak{M}_9 =$$
$$k_3^3a^3b^3(\gamma^2+1)^2(\beta_{11}\gamma^2+\beta_{22}+\beta_{12}\gamma);$$

und aus Gleichung (61.) ergibt sich:

$$M_4 = -2ab^3k_3\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[(\gamma^2+1)^2k_3^2 - (\gamma^2-1)^2k_1^2],$$

$$M_8 = -2a^3b^2k_3^2\gamma(\gamma^2+1)^2(b^2k_3+c^2k_2)[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2 + a^2b^2(\gamma^2+1)^2],$$

$$M_9 = 2a^3b^3k_3^3\gamma(\gamma^2+1)^2(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2).$$

Die Grössen β wollen wir nun so bestimmen, dass in den beiden Gleichungen (69.) und (61.) die genannten Coefficienten übereinstimmen. Damit gewinnen wir folgende drei in den Grössen β lineare Gleichungen:

(76.) $2\gamma(\gamma^4-1)(c^2k_1-a^2k_3)[-\vartheta[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]$
$-\upsilon[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]+k_2[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]]$
$-\beta_{11}[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]^2+\beta_{22}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2$
$+\beta_{12}\gamma[k_3^2(\gamma^2+1)^2-k_1^2(\gamma^2-1)^2] =$
$-2\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[(\gamma^2+1)^2k_3^2-(\gamma^2-1)^2k_1^2],$
$\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)(\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2)-\beta_{12}k_2\gamma(\gamma^2-1)$
$-\beta_{22}[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]-\beta_{11}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2] =$
$-\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2],$

oder:

(77.) $\beta_{11}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]+\beta_{22}[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]+\beta_{12}k_2\gamma(\gamma^2-1)=$
$2\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2]$,
(78.) $\beta_{11}\gamma^2+\beta_{22}+\beta_{12}\gamma=2\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$.

Den Wert von β_{22} aus der dritten Gleichung (78.) tragen wir in die beiden andern Gleichungen ein, und erhalten für (76.):

$\beta_{11}[[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]^2-\gamma^4[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2]$
$+\beta_{12}\gamma[k_3^2(\gamma^2+1)^2-k_1^2(\gamma^2-1)^2-\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2]=$
$-2\gamma(\gamma^4-1)(c^2+a^2)k_2[k_3(\gamma^2+1)[-\vartheta-\upsilon+k_2(\gamma^2+1)]$
$+k_1(\gamma^2-1)[\vartheta-\upsilon+k_2(\gamma^2-1)]]$
$-2\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[k_3^2(\gamma^2+1)^2-k_1^2(\gamma^2-1)^2$
$+\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]^2]$, oder:
$\beta_{11}(1-\gamma^4)[k_3^2(\gamma^2+1)^2+k_1^2(\gamma^2-1)^2+2k_3k_1(1+\gamma^4)]$
$+\beta_{12}\gamma(1-\gamma^4)[k_3^2(\gamma^2+1)+k_1^2(\gamma^2-1)+2k_3k_1\gamma^2]=$
$-2\gamma(\gamma^4-1)(c^2+a^2)k_2[k_3(\gamma^2+1)^2(-k_3+k_2)+k_1(\gamma^2-1)^2(k_1+k_2)]$
$-2\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[k_3^2(\gamma^2+1)^3+k_1^2(\gamma^2-1)^3$
$+2k_3k_1\gamma^2(\gamma^4-1)]$, oder:
(79.) $\beta_{11}b^2[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]+\beta_{12}\gamma b^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]=$
$\gamma[k_3k_1b^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)^3+k_3k_1b^2(b^2-a^2)(\gamma^2-1)^3$
$+(\gamma^4-1)[k_2k_3a^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)+k_1k_2c^2(b^2-a^2)(\gamma^2-1)$
$+2k_3k_1(b^2-a^2)(b^2+c^2)\gamma^2]]$,

und für (77.) kommt:

$\beta_{11}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2+k_3(\gamma^2+1)-2k_2\gamma^2]$
$+\beta_{12}\gamma[k_2(\gamma^2-1)+k_3(\gamma^2+1)-2k_2\gamma^2]=$
$2\gamma(\gamma^2+1)(b^2+c^2)[k_1[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2]$
$-(\gamma^2-1)(b^2-a^2)(c^2+a^2)[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]]$, oder:
(80.) $2\beta_{11}\gamma a^2+\beta_{12}a^2=k_1[b^2c^2(\gamma^2-1)^2+4c^2a^2\gamma^2+a^2b^2(\gamma^2+1)^2]$
$-(\gamma^2-1)(b^2-a^2)(c^2+a^2)[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]$.

Die Gleichung (80.), weil die einfachere, nehmen wir zuerst vor. Bezeichnen wir ihre rechte Seite kurz mit B″, so haben wir:

$$B''=$$
$\gamma^4(c^2+a^2)[k_1b^2-(b^2-a^2)(-k_3+2k_2)]+(c^2+a^2)[k_1b^2-k_3(b^2-a^2)]$

$$+ 2\gamma^2[- k_1 b^2 c^2 + 2 c^2 a^2 k_1 + a^2 b^2 k_1 + k_2(b^2 - a^2)(c^2 + a^2)] =$$
$$\gamma^4 a^2 (c^2 + a^2)[k_2 + 2(2b^4 + k_2)] - a^2(c^2 + a^2) k_2$$
$$+ 2\gamma^2 a^2[(b^2 + c^2) k_1 - (b^2 - a^2) k_3] =$$
$$2 a^2 \gamma^2[\gamma^2[b^2(k_3 + k_1) + k_2(c^2 + a^2)] + (b^2 + c^2) k_1 - (b^2 - a^2) k_3]$$
$$+ a^2 k_2 (c^2 + a^2)(\gamma^4 - 1) =$$
$$(80_1.) \quad 2 a^2 \gamma^2[(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3]$$
$$+ a^2 k_2 (c^2 + a^2)(\gamma^4 - 1).$$

Und die rechte Seite der Gleichung (79.), die wir mit B′ bezeichnen wollen, können wir folgendermassen umformen:

$$B' =$$
$$\gamma[k_3 k_1 b^2 (b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)^3 + k_3 k_1 b^2 (b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1)^3]$$
$$+ \gamma(\gamma^4 - 1)[k_3 (b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)[a^2 k_2 + k_1 (b^2 - a^2)]$$
$$+ k_1 (b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1)[c^2 k_2 + k_3 (b^2 + c^2)]] =$$
$$\gamma k_3 k_1 b^2[(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)^3 + (b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1)^3]$$
$$+ \gamma b^2(\gamma^4 - 1)[k_3 (\gamma^2 + 1)[k_3 (b^2 - a^2) + k_2 (c^2 + a^2)]$$
$$+ k_1 (\gamma^2 - 1)[k_1 (b^2 + c^2) + k_2 (c^2 + a^2)]] =$$
$$(80_2) b^2 \gamma[(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3][k_3 (\gamma^2 + 1)^2 + k_1 (\gamma^2 - 1)^2]$$
$$+ b^2 \gamma k_2 (c^2 + a^2)(\gamma^4 - 1)[k_3 (\gamma^2 + 1) + k_1 (\gamma^2 - 1)].$$

Das in $(80_1.)$ und $(80_2.)$ erlangte Resultat gibt uns sofort die Werte der Unbekannten β_{11}, β_{12}, nämlich:

$$(81.) \quad \beta_{11} = \gamma[(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3],$$
$$(82.) \quad \beta_{12} = k_2 (c^2 + a^2)(\gamma^4 - 1).$$

Endlich erhalten wir β_{22} nach Gleichung (78.):

$$\beta_{22} =$$
$$\gamma[- \beta_{11} \gamma - \beta_{12} + 2(\gamma^4 - 1)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(b^2 - a^2)] =$$
$$\gamma[- \gamma^2[(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3]$$
$$- (\gamma^4 - 1)(c^2 + a^2) k_2 + 2(\gamma^4 - 1)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(b^2 - a^2)] =$$
$$\gamma[-(\gamma^4 - 1)(c^2 + a^2) k_2 + (\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2)[-\gamma^2 k_1 + (\gamma^2 - 1)(-a^4 + k_2)]$$
$$+ (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2)[- \gamma^2 k_3 + (\gamma^2 + 1)(c^4 + k_3)]] =$$
$$\gamma[-(\gamma^4 - 1)(c^2 + a^2) k_2 + (\gamma^4 - 1)[-a^4 (b^2 + c^2) + c^4 (b^2 - a^2)]$$
$$- (\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3], \text{ also:}$$
$$(83.) \quad \beta_{22} = \gamma[- (\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2) k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2) k_3].$$

Stellen wir die für die Grössen β gewonnenen Werte nochmals zusammen:

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= \gamma[(\gamma^2+1)(b^2+c^2)k_1 + (\gamma^2-1)(b^2-a^2)k_3],\\
\beta_{22} &= \gamma[-(\gamma^2+1)(b^2+c^2)k_1 + (\gamma^2-1)(b^2-a^2)k_3],\\
\beta_{12} &= k_2(c^2+a^2)(\gamma^4-1),
\end{aligned} \tag{74.}$$

und führen wir sogleich einige im Folgenden oft wiederkehrende Relationen zwischen ihnen auf:

$$\beta_{11}+\beta_{22} = 2\gamma(\gamma^2-1)(b^2-a^2)k_3,\quad \beta_{11}-\beta_{22}=2\gamma(\gamma^2+1)(b^2+c^2)k_1;$$

$$\begin{aligned}
\beta_{22}\gamma^2+\beta_{11} &= \gamma[-(\gamma^4-1)(b^2+c^2)k_1 + (\gamma^4-1)(b^2-a^2)k_3]\\
&= \gamma(\gamma^4-1)[-(b^2+c^2)k_1 + (b^2-a^2)k_3],
\end{aligned}$$

$$\beta_{22}\gamma^2-\beta_{11} = \gamma[-(\gamma^2+1)^2(b^2+c^2)k_1 + (\gamma^2-1)^2(b^2-a^2)k_3];$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11}+\beta_{22}\gamma^2-\beta_{12}\gamma &= \gamma(\gamma^4-1)[-(b^2+c^2)k_1+(b^2-a^2)k_3-(c^2+a^2)k_2]\\
&= \gamma(\gamma^4-1)[-c^4(b^2-a^2)-b^4(c^2+a^2)+b^4(c^2+a^2)\\
&\qquad -a^4(b^2+c^2)-c^4(b^2-a^2)+a^4(b^2+c^2)]\\
&= -2\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)c^4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11}\gamma^2+\beta_{22}-\beta_{12}\gamma &= \gamma(\gamma^4-1)[(b^2+c^2)k_1+(b^2-a^2)k_3-(c^2+a^2)k_2]\\
&= 2\gamma(\gamma^4-1)(c^2+a^2)b^4.
\end{aligned}$$

Geben wir also den Grössen β die in (84.) aufgestellten Werte, so stimmen die beiden Gleichungen (61.) und (69.) in den Coefficienten der mit x^2 und y behafteten Glieder sowie in dem von den Coordinaten freien Gliede überein, d. h., es wird:

$$\mathfrak{M}_4 = M_4,\quad \mathfrak{M}_8 = M_8,\quad \mathfrak{M}_9 = M_9. \tag{85.}$$

Dass dann weiter in den genannten Gleichungen auch noch die Coefficienten von y^2, x, xy übereinstimmen, soll im Folgenden gezeigt werden.

In der Gleichung (61.) ist:

$$M_5 =$$
$$-2a^3b\,k_3\gamma(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[(\gamma^2+1)^2k_3^2-4\gamma^2k_2^2],$$
$$M_7 =$$
$$-a^2b^3k_3^2(c^2k_1-a^2k_3)(\gamma^4-1)(\gamma^2+1)[\gamma^2+1)^2(c^2+a^2)b^2-4\gamma^2c^2(b^2-a^2)],$$
$$M_6 =$$
$$8a^2b^2k_1k_2k_3\gamma^2(\gamma^2-1)(\gamma^4-1)(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2).$$

Und nach Gleichung (69.) bekommen wir:

$$\frac{\mathfrak{M}_5}{a^3 b k_3} =$$

$$4\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)[-\vartheta\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]-\upsilon[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2] + k_2\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]+k_2\gamma^2[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]] + \beta_{11}\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]^2+\beta_{22}[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]^2 + \beta_{12}\gamma[k_3(\gamma^2+1)-2k_2][-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2] =$$

$$4\gamma(\gamma^2+1)(b^2k_3+c^2k_2)[k_3[\gamma^2+1)(\upsilon-\vartheta\gamma^2)+2k_2\gamma^2(\vartheta-\upsilon)+2k_2{}^2\gamma^2(\gamma^2-1)] + k_3{}^2(\gamma^2+1)^2(\beta_{11}\gamma^2+\beta_{22}-\beta_{12}\gamma)+4k_2{}^2\gamma^2(\beta_{11}+\beta_{22}\gamma^2-\beta_{12}\gamma) - 4k_2k_3\gamma^2(\gamma^2+1)(\beta_{11}+\beta_{22})+2\beta_{12}k_2k_3\gamma(\gamma^2+1)^2,$$ mithin:

$$\frac{\mathfrak{M}_5}{2a^3bk_3\gamma(\gamma^4-1)} =$$

$$2(b^2k_3+c^2k_2)[-k_3b^2(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2+2k_1k_2\gamma^2+2k_2{}^2\gamma^2] + k_3{}^2b^4(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2-4k_2{}^2c^4(b^2-a^2)\gamma^2 - 4k_2k_3{}^2(b^2-a^2)\gamma^2+k_2{}^2k_3(c^2+a^2)(\gamma^2+1)^2 =$$

$$-(\gamma^2+1)^2(c^2+a^2)(k_2+b^4)k_3{}^2+4\gamma^2(b^2-a^2)(k_3+c^4)k_2{}^2 =$$

$$-(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)[(\gamma^2+1)^2k_3{}^2-4\gamma^2k_2{}^2],$$ folglich

(86.) $$\mathfrak{M}_5 = M_5;$$

$$\frac{\mathfrak{M}_7}{a^2b^3k_3{}^2(\gamma^2+1)} =$$

$$(c^2k_1-a^2k_3)(\gamma^4-1)(\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2) -2\beta_{11}\gamma[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]-2\beta_{22}\gamma[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)] -\beta_{12}[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)+\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]] =$$

$$(c^2k_1-a^2k_3)(\gamma^4-1)(\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2)-2k_3\gamma(\gamma^2+1)(\beta_{11}+\beta_{22}) + 2k_1\gamma(\gamma^2-1)(\beta_{11}-\beta_{22})-\beta_{12}[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2] =$$

$$(\gamma^4-1)[(c^2k_1-a^2k_3)(\vartheta\gamma^2+\upsilon-2k_2\gamma^2)-4k_3{}^2(b^2-a^2)\gamma^2 + 4k_1{}^2(b^2+c^2)\gamma^2-k_2(c^2+a^2)[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]] =$$

$$(\gamma^4-1)(c^2k_1-a^2k_3)[\vartheta\gamma^2+\upsilon+2k_2\gamma^2-2(\vartheta\gamma^2+\upsilon)] =$$

$$(\gamma^4-1)(c^2k_1-a^2k_3)[-(\gamma^2+1)^2(c^2+a^2)b^2+4\gamma^2c^2(b^2-a^2)],$$ mithin

(87.) $$\mathfrak{M}_7 = M_7;$$

$$\frac{\mathfrak{M}_6}{a^2b^2k_3} =$$

$$2(c^2k_1-a^2k_3)(\gamma^4-1)[-\vartheta\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]-\upsilon[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]$$
$$+k_2\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)-2k_2]+k_2\gamma^2[-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]]$$
$$+4(b^2k_3+c^2k_2)(\gamma^2+1)\gamma^2[-\vartheta[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]$$
$$-\upsilon[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]$$
$$+k_2[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)]+k_2\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]]$$
$$+2\gamma[\beta_{11}[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)][k_3(\gamma^2+1)-2k_2]$$
$$+\beta_{22}[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)][-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]]$$
$$+\beta_{12}[\gamma^2[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)][k_3(\gamma^2+1)-2k_2]$$
$$+[k_3(\gamma^2+1)-k_1(\gamma^2-1)][-k_3(\gamma^2+1)+2k_2\gamma^2]]=$$
$$2k_2(c^2+a^2)(\gamma^4-1)[k_3(\gamma^2+1)(\upsilon-\vartheta\gamma^2)+2k_2\gamma^2(\vartheta-\upsilon)+2k_2{}^2\gamma^2(\gamma^2-1)]$$
$$+4k_1(b^2+c^2)(\gamma^2+1)\gamma^2[-k_3(\gamma^2+1)(\vartheta+\upsilon)+k_1(\gamma^2-1)(\vartheta-\upsilon)$$
$$+k_2[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]]$$
$$+2\gamma[k_3{}^2(\gamma^2+1)^2(\beta_{11}-\beta_{22})-k_1k_3(\gamma^4-1)(\beta_{11}+\beta_{22})$$
$$+2k_2k_3(\gamma^2+1)(\beta_{22}\gamma^2-\beta_{11})+2k_1k_2(\gamma^2-1)(\beta_{22}\gamma^2+\beta_{11})]$$
$$+\beta_{12}[k_3{}^2(\gamma^2+1)^2(\gamma^2-1)-4k_1k_2\gamma^2(\gamma^2-1)+k_1k_3(\gamma^4-1)(\gamma^2+1)]=$$
$$2k_2(c^2+a^2)(\gamma^4-1)(\gamma^2-1)[-k_3(\gamma^2+1)^2(c^2+a^2)b^2+2k_1k_2\gamma^2+2k_2{}^2\gamma^2]$$
$$+4k_1(b^2+c^2)(\gamma^2+1)\gamma^2[-k_3{}^2(\gamma^2+1)^2+k_1{}^2(\gamma^2-1)^2$$
$$+k_2[k_3(\gamma^2+1)^2+k_1(\gamma^2-1)^2]]$$
$$+4\gamma^2[k_1k_3{}^2(b^2+c^2)(\gamma^2+1)^3-k_1k_3{}^2(b^2-a^2)(\gamma^2+1)(\gamma^2-1)^2$$
$$+k_2k_3(\gamma^2+1)[-(\gamma^2+1)^2(b^2+c^2)k_1+(\gamma^2-1)^2(b^2-a^2)k_3]$$
$$+k_1k_2(\gamma^4-1)(\gamma^2-1)[-(b^2+c^2)k_1+(b^2-a^2)k_3]]$$
$$+k_2(c^2+a^2)(\gamma^4-1)(\gamma^2-1)[k_3{}^2(\gamma^2+1)^2-4k_1k_2\gamma^2+k_1k_3(\gamma^2+1)^2],$$

daher:

$$\frac{\mathfrak{M}_6}{4a^2b^2k_3(\gamma^4-1)(\gamma^2-1)\gamma^2}=$$

$$k_2{}^2(c^2+a)(k_1+k_2)+k_1{}^2(b^2+c^2)(k_1+k_2)-k_3{}^2(b^2-a^2)(k_1-k_2)$$
$$+k_1k_2[-(b^2+c^2)k_1+(b^2-a^2)k_3]-k_1k_2{}^2(c^2+a^2)=$$
$$(b^2-a^2)k_1k_2k_3+[k_3{}^2(b^2-a^2)+k_2{}^2(c^2+a^2)]k_2$$
$$+[-k_3{}^2(b^2-a^2)+k_1{}^2(b^2+c^2)]k_1=$$
$$k_1k_2[(b^2-a^2)k_3+(b^2+c^2)k_1+(c^2+a^2)k_2]=$$
$$2k_1k_2(b^2-a^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$

somit

(88.) $$\mathfrak{M}_6 = M_6 .$$

Mit den in (84.) hingeschriebenen Werten der Grössen β wird also die Gleichung (69.) genau zur Gleichung (61.). Es schneidet also die Ebene $\mathfrak{E}$ die durch:

(**89.**) $$0 = Q_\infty(G_1^2\vartheta + G_2^2\upsilon - 2G_1G_2\gamma k_2) + G_1^2\beta_{11} + G_2^2\beta_{22} + G_1G_2\beta_{12}$$

dargestellte kubische Fläche, wofern die Constanten β die in (84.) angegebenen Werte bedeuten, in derselben Kurve dritter Ordnung wie die Fläche R, womit sich die Identität beider Flächen ergibt, sodass *wir in jener Gleichung (89.) die der Regelfläche R vor uns haben.*

Zum Schluss mögen nochmals die hier verwendeten Abkürzungen zusammengestellt werden:

$$Q_\infty = -xa(\gamma^2 - 1) + 2yb\gamma + zc(\gamma^2 + 1),$$
$$G_1 = b(xc - za) - \gamma ca(b - y),$$
$$G_2 = \gamma b(xc + za) - ca(b + y),$$
$$\beta_{11} = \gamma[(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2)k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2)k_3],$$
$$\beta_{22} = \gamma[-(\gamma^2 + 1)(b^2 + c^2)k_1 + (\gamma^2 - 1)(b^2 - a^2)k_3],$$
$$\beta_{12} = k_2(c^2 + a^2)(\gamma^4 - 1),$$
$$k_1 = b^2c^2 - c^2a^2 + a^2b^2, \quad k_2 = b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2,$$
$$k_3 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,$$
$$\vartheta = b^2(c^2 + a^2)\gamma^2 + c^2a^2, \quad \upsilon = b^2(c^2 + a^2) + c^2a^2\gamma^2.$$

§ 4.

Die von einer Gerade g der Regelschaar inducierte Paarung sämtlicher Geraden derselben vermittelst der von den Punkten von g ausstrahlenden kürzesten Transversalen zwischen ihr und je einer anderen Gerade.

Indem jeder Punkt auf jeder Gerade g der Regelschaar zweimal Fusspunkt eines kürzesten Lots zwischen ihr und je einer andern ist, scheidet er zwei Geraden aus der Schaar aus, nämlich diejenigen beiden, welche mit g kürzeste Lote bilden, die auf g in ihm ihren Fusspunkt haben. Lassen

wir den Punkt die Gerade g durchlaufen, so werden damit die Geraden der g-Schaar zu ∞^1 Paaren angeordnet. Und jede Gerade $g_{\sigma 1}$ der Schaar gehört zu einem und nur zu einem dieser Paare; denn das kürzeste Lot von $g_{\sigma 1}$ mit g trifft diese in einem bestimmten Punkt $\mathfrak{P}$, durch den nur noch ein anderes kürzestes Lot, etwa zwischen g und $g_{\sigma 2}$, geht, so dass $g_{\sigma 1}$ nur mit $g_{\sigma 2}$, und sonst mit keiner andern Gerade, ein Paar bildet. *Folglich ruft jede Gerade g eine involutorische Paarung sämtlicher Geraden der Schaar hervor.* Sie werde mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet. In ihr sind gepaart zwei solche Geraden, welche mit g kürzeste Lote bilden, die denselben Fusspunkt auf g haben. Insbesondere ist der g diejenige im allgemeinen von ihr verschiedene Gerade gepaart, welche ihr kürzestes Lot mit g nach dem Centralpunkt ω von g hinsendet, also die g_ω. Die Geraden g_D, $g_{\bar{D}}$ sind die reellen Doppelstrahlen in der Involution $\mathfrak{J}$, diese ist also hyperbolisch.

Wir beweisen im Folgenden, dass *jedes Paar in einer Involution $\mathfrak{J}$ noch einer zweiten Involution als Paar angehört, und dass jede zwei beliebige Geraden der Schaar ein Paar in einer und damit noch in einer zweiten Involution bilden.*

Ist $\mathfrak{P}$ ein auf der Gerade g gelegener Punkt, bestimmt durch den Parameter r, so sind die Parameter γ_σ derjenigen beiden Geraden g_σ, deren kürzeste Lote mit g in $\mathfrak{P}$ sich schneiden, durch die Gleichung (44.) des § 2 gegeben:

$$(90.) \qquad 0 = \gamma_\sigma{}^2 u + \gamma_\sigma v + w, \quad \text{wobei:}$$
$$u = r(\gamma^2 + 1)\vartheta + \gamma^2 a b c k_1,$$

$$(91.) \qquad v = \gamma k_2 [-2r(\gamma^2 + 1) + a b c(\gamma^2 - 1)],$$
$$w = r(\gamma^2 + 1)\upsilon - \gamma^2 a b c k_1.$$

Wir fragen, ob es eine [oder mehrere] Gerade g_1 gibt, sodass die kürzesten Lote jener beiden Geraden g_σ mit g_1 den nämlichen auf dieser gelegenen Fusspunkt $\mathfrak{P}_1$ haben. Gesetzt, für die Gerade g_1 mit dem auf ihr gelegenen Punkte $\mathfrak{P}_1$ träfe das ein, so müsste die Gleichung bestehen:

$$(90_1.)\quad 0 = \gamma_\sigma^2 u_1 + \gamma_\sigma v_1 + w_1, \quad \text{wobei:}$$

$$u_1 = r_1(\gamma_1^2+1)\upsilon_1 + \gamma_1^2 abc k_1.$$

$$(91_1.)\quad \begin{aligned} v_1 &= \gamma_1 k_2[-2r_1(\gamma_1^2+1) + abc(\gamma_1^2-1)],\\ w_1 &= r_1(\gamma_1^2+1)\upsilon_1 - \gamma_1^2 abc k_1,\\ \vartheta_1 &= b^2(c^2+a^2)\gamma_1^2 + c^2a^2, \quad \upsilon_1 = b^2(c^2+a^2) + c^2a^2\gamma_1^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (90.) und (90_1.) fordern:

$$(92.)\qquad \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1}.$$

In diesen beiden Gleichungen (92.) sind γ_1 und r_1 die einzigen Unbekannten. Sie suchen wir als Funktionen der gegebenen Parameter γ und r auszudrücken. Aus den beiden Gleichungen (92.) leiten wir uns folgende zwei her:

$$\frac{u+w}{u_1+w_1} = \frac{v}{v_1}, \qquad \frac{u+w}{u_1+w_1} = \frac{u}{u_1}.$$

Die erstere gibt:

$$\frac{r(\gamma^2+1)^2}{r_1(\gamma_1^2+1)^2} = \frac{\gamma[-2r(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)]}{\gamma_1[-2r_1(\gamma_1^2+1) + abc(\gamma_1^2-1)]}, \qquad \text{oder:}$$

$$(93.)\quad \begin{aligned} 0 = {} & 2rr_1(\gamma^2+1)(\gamma_1^2+1)(\gamma-\gamma_1)(\gamma\gamma_1-1)\\ & - abc[r\gamma_1(\gamma^2+1)^2(\gamma_1^2-1) - r_1\gamma(\gamma_1^2+1)^2(\gamma^2-1)], \end{aligned}$$

und die andere liefert:

$$\frac{r(\gamma^2+1)^2}{r_1(\gamma_1^2+1)^2} = \frac{r(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 abc k_1}{r_1(\gamma_1^2+1)\vartheta_1 + \gamma_1^2 abc k_1}, \qquad \text{das ist:}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & rr_1(\gamma^2+1)(\gamma_1^2+1)[-(\gamma^2+1)\vartheta_1 + (\gamma_1^2+1)\vartheta]\\ & + abc k_1[r_1\gamma^2(\gamma_1^2+1)^2 - r\gamma_1^2(\gamma^2+1)^2], \text{ oder, falls } k_1 \neq 0:\\ (94)\; 0 = {} & rr_1(\gamma^2+1)(\gamma_1^2+1)(\gamma^2-\gamma_1^2) + abc[r_1\gamma^2(\gamma_1^2+1)^2 - r\gamma_1^2(\gamma^2+1)^2]. \end{aligned}$$

Durch Elimination von rr_1 aus den Gleichungen (93.) und (94.) gewinnen wir eine überaus einfache Beziehung zwischen den vier Parametern, in die nur diese selbst eingehen, nämlich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & r_1\gamma(\gamma_1^2+1)^2[(\gamma+\gamma_1)(\gamma^2-1) - 2\gamma(\gamma\gamma_1-1)]\\ & - r\gamma_1(\gamma^2+1)^2[(\gamma+\gamma_1)(\gamma_1^2-1) - 2\gamma_1(\gamma\gamma_1-1)], \text{ oder:}\\ 0 = {} & (\gamma^2+1)(\gamma_1^2+1)(\gamma-\gamma_1)[r_1\gamma(\gamma_1^2+1) + r\gamma_1(\gamma^2+1)], \end{aligned}$$

das ist bei beliebigem γ:

$$(\mathbf{95.})\quad 0 = r_1\gamma(\gamma_1^2+1) + r\gamma_1(\gamma^2+1).$$

Tragen wir den hieraus sich ergebenden Wert von r_1 in die Gleichung (93.) ein, so kommt:

$$0 =$$

$$-2r(\gamma^2+1)(\gamma_1-\gamma)(\gamma\gamma_1-1)+abc\gamma[(\gamma^2+1)(\gamma_1{}^2-1)+(\gamma_1{}^2+1)(\gamma^2-1)],$$

das ist:

(96.) $0 = (\gamma\gamma_1-1)[-r(\gamma^2+1)(\gamma_1-\gamma)+abc\gamma(\gamma\gamma_1+1)]$, oder:

(97.) $$0 = -r(\gamma^2+1)(\gamma_1-\gamma)+abc\gamma(\gamma\gamma_1+1),$$

da der Spezialfall $\gamma\gamma_1 - 1 = 0$ hier nicht besonders berücksichtigt zu werden braucht, weil er sich sogleich als im allgemeinen Fall mit enthalten seiend erweisen wird.

Eliminierten wir aus den Gleichungen (95.) und (93.) den Parameter r, so erhielten wir analog die Beziehung:

(97_1.) $$0 = -r_1(\gamma_1{}^2+1)(\gamma-\gamma_1)+abc\gamma_1(\gamma\gamma_1+1).$$

Aus (97.) ergibt sich nun γ_1:

(98.) $$\gamma_1 = \frac{\gamma[abc+r(\gamma^2+1)]}{-abc\gamma^2+r(\gamma^2+1)},$$

und damit erhalten wir nach (95.) für r_1:

(99.) $$r_1 = -\frac{r\gamma_1(\gamma^2+1)}{\gamma(\gamma_1{}^2+1)} = -\frac{r[abc+r(\gamma^2+1)][-abc\gamma^2+r(\gamma^2+1)]}{a^2b^2c^2\gamma^2+r^2(\gamma^2+1)^2}.$$

Wir haben also gefunden: *Die beiden zum Punkte* $\mathfrak{P}$ *auf* g *gehörigen Erzeugenden* g_σ *gehören nur noch zum Punkte* $\mathfrak{P}_1$ *auf* g_1, *für welche beiden Elemente die sie bestimmenden Parameter in den Formeln (98.) und (99.) als Funktionen von den gegebenen Parametern* γ *und* r *sowie der Grössen* a, b, c *dargestellt sind.* Damit ist bewiesen, dass jedes in einer Involution $\mathfrak{J}$ enthaltene Paar auch noch in einer andern Involution $\mathfrak{J}_1$ als Paar auftritt.

Aus den Beziehungen (97.) und (97_1.) können wir im Anschluss hieran sofort noch ein anderes Ergebnis herleiten. Nach r und r_1 aufgelöst liefern die genannten Beziehungen:

(100.) $$r = \frac{abc\gamma(\gamma\gamma_1+1)}{(\gamma^2+1)(\gamma_1-\gamma)}, \quad r_1 = \frac{abc\gamma_1(\gamma\gamma_1+1)}{(\gamma_1{}^2+1)(\gamma-\gamma_1)}.$$

Das heisst: *Das gemeinsame Paar in den durch zwei Geraden* g *und* g_1 *inducierten Involutionen* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{J}_1$ *sendet seine*

kürzesten Lote mit g bzw. g_1 nach demjenigen Punkte $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}_1$, dessen Parameter r bzw. r_1 in der in (100.) angegebenen Weise durch die Parameter γ und γ_1 der gegebenen Geraden g und g_1 ausgedrückt wird.

Kommen wir nun, hinsichtlich der Beziehung (96.), auf die Formel (99.) zurück, so ersehen wir, dass, wenn r so beschaffen ist, dass $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}$ also $\gamma\gamma_1 - 1 = 0$ ist. r_1 den Wert $-r$ annimmt, ein Ergebnis, das die Beziehungen (96.) und (93.) speziell für $\gamma\gamma_1 - 1 = 0$ liefern. Demnach brauchte in der Tat in der Beziehung (96.) der Spezialfall $\gamma\gamma_1 - 1 = 0$ nicht besonders berücksichtigt zu werden.

Den andern Satz, dass nämlich jede zwei beliebige Geraden g_1 und g_2 ein Paar in einer und damit noch in einer zweiten Involution bilden, beweisen wir mit Zuhilfenahme der zu jenen Geraden gehörigen Fusspunktkegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Zwei solche Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ schneiden sich in zwei stets reellen Punkten. Denn da ihre Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ stets reell sind, so ist auch ihre Durchschnittslinie $(\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2)$ stets reell, und diese geht durch das Centrum O der Fläche, da dieses das Centrum für alle Fusspunktkegelschnitte ist; folglich ist $(\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2)$ ein Durchmesser für beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, und er trifft sie beide reell, da beide Ellipsen sind. Somit schneiden sich zwei Fusspunktkegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in zwei stets reellen Punkten. Diese seien α und β. Sind nun g_α und g_β die durch α und β gehenden Geraden aus der g-Schaar, so sind die von α und β auf g_1 und g_2 gefällten Lote die kürzesten Entfernungen von g_1 und g_2 mit g_α und g_β oder mit anderen Worten: g_1 und g_2 ist das gemeinsame Paar in den beiden durch g_α und g_β inducierten Involutionen $\mathfrak{J}_\alpha$ und $\mathfrak{J}_\beta$.

Um endlich die die Geraden g_α und g_β festlegenden Parameter γ_α und γ_β zu ermitteln, gehen wir von den Gleichungen der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ aus. Sie sind nach (57.) des § 3:

$$0 = bck_1(\gamma_1^2 - 1)x + 2cak_2\gamma_1 y - abk_3(\gamma_1^2 + 1)z,$$
$$0 = bck_1(\gamma_2^2 - 1)x + 2cak_2\gamma_2 y - abk_3(\gamma_2^2 + 1)z.$$

Hiernach ergeben sich folgende zu den Richtungskosinussen der Schnittlinie $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2)$ proportionale Werte:

$$2a^2bck_2k_3[-\gamma_1(\gamma_2^2+1)+\gamma_2(\gamma_1^2+1)] =$$
$$2a^2bck_2k_3(\gamma_1\gamma_2-1)(\gamma_1-\gamma_2),$$
$$b^2cak_1k_3[-(\gamma_1^2+1)(\gamma_2^2-1)+(\gamma_1^2-1)(\gamma_2^2+1)] =$$
$$2b^2cak_3k_1(\gamma_1^2-\gamma_2^2),$$
$$2c^2abk_1k_2[\gamma_2(\gamma_1^2-1)-\gamma_1(\gamma_2^2-1)] =$$
$$2c^2abk_1k_2(\gamma_1\gamma_2+1)(\gamma_1-\gamma_2).$$

Da die Gerade $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2)$ durch den Mittelpunkt O der Fläche H^2 geht, so sind die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit H^2 bzw. proportional zu:

$$ak_2k_3(\gamma_1\gamma_2-1),\quad bk_3k_1(\gamma_1+\gamma_2),\quad ck_1k_2(\gamma_1\gamma_2+1),$$

so dass wir unter Benutzung eines Proportionalitätsfaktors erhalten:

$$\alpha'=\frac{1}{\eta}\cdot ak_2k_3(\gamma_1\gamma_2-1),\quad \alpha''=\frac{1}{\eta}\cdot bk_3k_1(\gamma_1+\gamma_2),$$
$$\alpha'''=\frac{1}{\eta}\cdot ck_1k_2(\gamma_1\gamma_2+1),$$

und für die Coordinaten des Punktes β gelten dieselben Ausdrücke mit $-\eta$. Die Gleichung der Fläche H^2:

$$0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1$$

fordert, dass:

$$\eta^2=k_2^2k_3^2(\gamma_1\gamma_2-1)^2+k_3^2k_1^2(\gamma_1+\gamma_2)^2-k_1^2k_2^2(\gamma_1\gamma_2+1)^2.$$

Da nun nach (2.) des § 1:

$$\gamma_\alpha=(1+\frac{\alpha''}{b}):(\frac{\alpha'}{a}+\frac{\alpha'''}{c}),\quad \gamma_\beta=(1+\frac{\beta''}{b}):(\frac{\beta'}{a}+\frac{\beta'''}{c}),$$

so wird:

$$\gamma_\alpha=\frac{k_3k_1(\gamma_1+\gamma_2)+\eta}{k_2[k_3(\gamma_1\gamma_2-1)+k_1(\gamma_1\gamma_2+1)]},$$

$$\gamma_\beta=\frac{k_3k_1(\gamma_1+\gamma_2)-\eta}{k_2[k_3(\gamma_1\gamma_2-1)+k_1(\gamma_1\gamma_2+1)]}.$$

Diese Ausdrücke lehren, dass γ_α und γ_β die Wurzeln folgender quadratischen Gleichung sind:

$$(101.)\quad 0 = k_2[k_3(\gamma_1\gamma_2 - 1) + k_1(\gamma_1\gamma_2 + 1)]\gamma_0^2 - 2k_3k_1(\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_0 + k_2[k_1(\gamma_1\gamma_2 + 1) - k_3(\gamma_1\gamma_2 - 1)].$$

Also haben wir den Satz gewonnen: „*Sind g_1 und g_2 zwei beliebige Geraden mit den Parametern γ_1 und γ_2, so werden die beiden Involutionen, deren gemeinsames Paar sie sind, durch die Geraden g_α und g_β hervorgerufen, deren Parameter γ_α und γ_β die Wurzeln der in (101.) aufgestellten quadratischen Gleichung sind.*“

Welches aber ist der Parameter des auf g_α bzw. g_β gelegenen Punktes, in welchem sich die kürzesten Lote von g_1 und g_2 mit g_α bzw. g_β schneiden? Hierüber gibt uns sofort das in (100.) erhaltene Ergebnis Aufschluss. Die gesuchten Parameter sind folgende Funktionen der Parameter γ_α und γ_β :

$$(102.)\quad r_\alpha = \frac{abc\gamma_\alpha(\gamma_\alpha\gamma_\beta + 1)}{(\gamma_\alpha^2+1)(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)}, \qquad r_\beta = \frac{abc\gamma_\beta(\gamma_\alpha\gamma_\beta + 1)}{(\gamma_\beta^2 + 1)(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)}.$$

Die Gleichung (101.) führt uns noch zu einem andern wichtigen Ergebnis. Wenn wir nämlich $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ setzen, das heisst, wenn wir fragen, in welchen beiden Involutionen $\mathfrak{I}_\alpha$ und $\mathfrak{I}_\beta$ eine gegebene durch den Parameter γ festgelegte Gerade einer der beiden Doppelstrahlen ist, so antwortet hierauf unsere Gleichung:

$$0 = k_2[k_3(\gamma^2 - 1) + k_1(\gamma^2 + 1)]\gamma_0^2 - 4k_3k_1\gamma\gamma_0 + k_2[k_1(\gamma^2 + 1) - k_3(\gamma^2 - 1)], \qquad \text{das ist:}$$

$$(103.)\quad 0 = k_2(k_3 + k_1)\gamma^2\gamma_0^2 - k_2(k_3 - k_1)\gamma^2 - k_2(k_3 - k_1)\gamma_0^2 - 4k_3k_1\gamma\gamma_0 + k_2(k_3 + k_1).$$

Mithin bildet eine gegebene durch den Parameter γ festgelegte Gerade g einen der beiden Doppelstrahlen in denjenigen beiden Involutionen, die durch die Geraden g_α und g_β hervorgerufen werden, deren Parameter γ_α und γ_β die Wurzeln der quadratischen Gleichung (103.) sind. Mit andern Worten: Nach der Gerade g geht je eine der beiden von g_α und g_β ausgesandten Cuspidaltransversalen. Da aber die Beziehung (103.) vollständig symmetrisch gebaut ist nach γ und γ_0, so bedeutet das, dass die beiden von der Gerade g ausgesandten

Cuspidaltransversalen nach den Geraden g_α und g_β gehen, sodass sich g_α und g_β als die Doppelstrahlen der durch g inducierten Involution $\mathfrak{J}$ erweisen. In dem in (103.) gewonnenen Ergebnis liegt mithin der allgemeine Satz, dass *jede zu einer Gerade einer Schaar gehörige Cuspidaltransversale auch Cuspidaltransversale für die zweite Gerade aus derselben Schaar ist, auf der sie senkrecht steht.*

Dieser Satz verweist bereits in den nächsten §, der sich speziell mit den Cuspidalpunkten sowie Cuspidaltransversalen der Regelschaar befasst.

§ 5.

Die Kurve der Cuspidalpunkte und die Fläche der Cuspidaltransversalen der Regelschaar.

Ist $\mathfrak{P}$ ein durch den Parameter r bestimmter Punkt der Gerade g und sind $g_{\sigma 1}$, $g_{\sigma 2}$ die beiden Geraden, deren kürzeste Lote mit g in ihm sich schneiden, so werden Summe und Produkt ihrer Parameter durch die quadratische Gleichung (44.) des § 2 also geliefert:

$$(104.)\qquad \gamma_{\sigma 1} + \gamma_{\sigma 2} = -\frac{v}{u}\ ,\quad \gamma_{\sigma 1}\gamma_{\sigma 2} = \frac{w}{u}\ ,\ \text{wobei:}$$
$$u = r(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 a b c k_1\ ,$$
$$v = \gamma k_2[-2r(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)],$$
$$w = r(\gamma^2+1)\upsilon - \gamma^2 a b c k_1\ .$$

Ist insbesondere $\mathfrak{P}$ einer der beiden auf g gelegenen [im § 2 als stets reell erkannten] Cuspidalpunkte, etwa D, festgelegt durch den Parameter r_D, so wird für ihn $\gamma_{\sigma 1} = \gamma_{\sigma 2} = \gamma_D$, und wir erhalten aus (104.):

$$(105.)\qquad 2\gamma_D = -\frac{\gamma k_2[-2r_D(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)]}{r_D(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 a b c k_1}\ ,$$

$$(106.)\qquad \gamma_D{}^2 = \frac{r_D(\gamma^2+1)\upsilon - \gamma^2 a b c k_1}{r_D(\gamma^2+1)\vartheta + \gamma^2 a b c k_1}\ .$$

Aus diesen beiden Gleichungen können wir einmal γ_D eliminieren, was uns zu der in in (45.) des §2 erlangten quadratischen Gleichung für die Parameter der beiden Cuspidalpunkte von g führt:

(**107.**) $$\begin{aligned} 0 = {} & 4 r_D{}^2 (\gamma^2 + 1)^2 (\gamma^2 k_2{}^2 - \vartheta \upsilon) \\ & + 4 r_D a b c \gamma^2 (\gamma^2 + 1) [-(\gamma^2 - 1) k_2{}^2 + (\vartheta - \upsilon) k_1] \\ & + a^2 b^2 c^2 \gamma^2 [(\gamma^2 - 1)^2 k_2{}^2 + 4 \gamma^2 k_1{}^2] ; \end{aligned}$$

und das andere Mal können wir r_D eliminieren, was uns eine quadratische Gleichung für die Parameter der beiden zweiten Geraden liefern muss, auf denen die beiden von g ausgesandten Cuspidaltransversalen auch noch senkrecht stehen, oder, anders ausgedrückt, eine quadratische Gleichung für die Parameter der Doppelstrahlen in der von g induzierten Involution $\mathfrak{J}$. Um diese wichtige in (103.) des § 4 bereits vorliegende Gleichung auch auf diesem Wege zu ermitteln, tragen wir den aus (105.) für r_D sich ergebenden Wert:

$$r_D = a b c \gamma \frac{2 k_1 \gamma \gamma_D + k_2 (\gamma^2 - 1)}{2 (\gamma^2 + 1 (\gamma k_2 - \gamma_D \vartheta)}$$

in die Gleichung (106.) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \gamma_D{}^2 = {} & \frac{[2 k_1 \gamma \gamma_D + k_2 (\gamma^2 - 1)] \upsilon - 2 \gamma k_1 (\gamma k_2 - \gamma_D \vartheta)}{[2 k_1 \gamma \gamma_D + k_2 (\gamma^2 - 1)] \vartheta + 2 \gamma k_1 (\gamma k_2 - \gamma_D \vartheta)} \\ = {} & \frac{k_2 [(\gamma^2 - 1) \upsilon - 2 \gamma^2 k_1] + 2 k_1 \gamma \gamma_D (\vartheta + \upsilon)}{k_2 [(\gamma^2 - 1) \vartheta + 2 \gamma^2 k_1]} . \end{aligned}$$

Da:

$$\vartheta + \upsilon = k_3 (\gamma^2 + 1), \quad \vartheta - \upsilon = k_1 (\gamma^2 - 1),$$

so lässt sich der Bruch rechts mit (γ^2+1) kürzen, und es ergibt sich dann:

(**108.**) $$\begin{aligned} 0 = {} & k_2 (k_3 + k_1) \gamma^2 \gamma_D{}^2 - k_2 (k_3 - k_1) \gamma^2 - k_2 (k_3 - k_1) \gamma_D{}^2 \\ & - 4 k_3 k_1 \gamma \gamma_D + k_2 (k_3 + k_1), \end{aligned}$$

das ist in den ursprünglichen Grössen a, b, c geschrieben:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \\ & b^2 (c^2 + a^2) (b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 b^2) \gamma^2 \gamma_D{}^2 - c^2 a^2 (b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 b^2) \gamma^2 \\ & - c^2 a^2 (b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 b^2) \gamma_D{}^2 - 2 [b^4 (c^2 + a^2)^2 - c^4 a^4] \gamma \gamma_D \\ & + b^2 (c^2 + a^2) (b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 b^2). \end{aligned}$$

Hatte sich schon im § 2 ergeben, dass jede Gerade g zu zwei Geraden g_D und $g_{\bar{D}}$ von der Beschaffenheit führt, dass die kürzesten Transversalen zwischen ihnen und der g durch die auf g gelegenen Cuspidalpunkte laufen also die beiden zu g gehörigen Cuspidaltransversalen p_D, $p_{\bar{D}}$ sind, so erkennen wir jetzt weiter an der nach γ und γ_D symmetrisch gebauten Beziehung (108.), dass z. B. p_D auch eine der beiden zur Gerade g_D gehörigen Cuspidaltransversalen ist, worin der allgemeine bereits am Ende des § 4 ausgesprochene Satz liegt: *Jede zu einer Gerade gehörige Cuspidaltranversale ist auch Cuspidaltransversale für die zweite Gerade aus derselben Schaar, auf der sie senkrecht steht.* Und das gilt nicht nur für die g-Schaar, sondern auch für die l-Schaar, da in der Beziehung (108.) die Grösse b nur in gerader Potenz auftritt.

Auf jeder Cuspidaltransversale befinden sich also zwei Cuspidalpunkte. Die Vermutung liegt nahe, dass durch jeden Cuspidalpunkt zwei Cuspidaltransversalen gehen, die eine zur g-Schaar, die andere zur l-Schaar gehörig, dass also beide Schaaren zu demselben Continuum von Cuspidalpunkten führen. Die Richtigkeit dieser Vermutung bestätigt die erste der aus den beiden Gleichungen (105.) und (106.) hergeleiteten Beziehungen, nämlich die Beziehung (107.), die wir in (46.) des § 2 bereits auf die Form gebracht haben:

(109.) $$0 = \rho_0 r_D^2 + \rho_1 r_D + \rho_2, \text{ wobei:}$$
$$\rho_0 = -4(\gamma^2+1)^2[(\gamma^2-1)^2(c^2+a^2)+4\gamma^2(b^2+c^2)],$$
$$\rho_1 = 16abc(b^2-a^2)(\gamma^4-1)\gamma^2,$$
$$\rho_2 = \gamma^2[(\gamma^2-1)^2 k_2^2 + 4\gamma^2 k_1^2].$$

Hiernach ergibt sich für die Summe der beiden Wurzeln von (109.) der Ausdruck:

$$r_D + r_{\bar{D}} = \frac{4abc(b^2-a^2)(\gamma^2-1)\gamma^2}{(\gamma^2+1)[(\gamma^2-1)^2(c^2+a^2)+4\gamma^2(b^2+c^2)]},$$

was nach (15.) des § 1 bedeutet, dass *die beiden Cuspidalpunkte auf g gleichweit vom Mittelpunkt O der H^2 entfernt liegen*, dass also $OD = O\bar{D} = \delta$. Für diese Strecke δ erhalten wir:

$$\delta^2 = (r_D g' + \mathfrak{x})^2 + (r_D g'' + \mathfrak{y})^2 + r_D{}^2 g'''^2 \text{, oder:}$$

$$(110.) \qquad 0 = (g'^2 + g''^2 + g'''^2) r_D{}^2 + 2(g'\mathfrak{x} + g''\mathfrak{y}) r_D + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \delta^2,$$

worin r_D eine der beiden Wurzeln, gleich viel welche, der Gleichung (109.) ist. Da also die beiden Gleichungen (109.) und (110.) durch dieselben Wurzeln befriedigt werden, so gelten die Proportionen:

$$(g'^2 + g''^2 + g'''^2) : \rho_0 = 2(g'\mathfrak{x} + g''\mathfrak{y}) : \rho_1 = (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \delta^2) : \rho_2,$$

woraus sich für δ^2 folgender Ausdruck ergibt:

$$\delta^2 =$$

$$- \rho_2 \frac{g'^2 + g''^2 + g'''^2}{\rho_0} + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 =$$

$$\frac{(\gamma^2 - 1)^2 k_2{}^2 + 4\gamma^2 k_1{}^2}{4a^2b^2c^2(\gamma^2+1)^2} + \frac{b^2(\gamma^2-1)^2 + 4a^2\gamma^2}{(\gamma^2+1)^2} =$$

$$\frac{(\gamma^2+1)^2(k_2{}^2 + 4a^2b^4c^2) + 4\gamma^2(k_1{}^2 - k_2{}^2 + 4a^4b^2c^2 - 4a^2b^4c^2)}{4a^2b^2c^2(\gamma^2+1)^2} =$$

$$\frac{k_2{}^2 + 4a^2b^4c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Dieses Ergebnis lehrt, dass *beide Geradenschaaren zu derselben Cuspidalkurve führen, und dass diese der Schnitt der Fläche H^2 mit der zu ihr konzentrischen Kugel vom Radius*

$$(111.) \qquad \delta = \frac{1}{2abc}\sqrt{b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)},$$

demnach eine sphärische Raumkurve vierter Ordnung ist. Zugleich hat sich ergeben, dass durch jeden Cuspidalpunkt zwei Cuspidaltransversalen gehen, die eine zur g-Schaar, die andere zur l-Schaar gehörig.

Dass der Radius δ der Cuspidalkugel im allgemeinen grösser als jede der Halbachsen der Kehlellipse, niemals aber kleiner als eine derselben ist, braucht jetzt nicht mehr nachgewiesen zu werden, nachdem im § 2 bereits erkannt ist, dass auf jeder Gerade g die Cuspidalpunkte reell sind.

Sei $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ ein Punkt der Cuspidalkurve, dann muss die Elimination von x_1, y_1, z_1 aus folgenden vier Gleichungen:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} ,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \delta^2 = 0 , \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

zur Gleichung desjenigen Kegels führen, der die Cuspidalkurve aus dem Mittelpunkt O der Fläche H^2 projiziert. Dieser Kegel heisse der Cuspidalkegel. Aus jenen vier Gleichungen leiten wir folgende drei her:

$$y_1^2 = \frac{y^2}{z^2} \cdot z_1^2 , \quad \frac{x^2}{\delta^2 - y_1^2 - z_1^2} = \frac{y^2}{y_1^2} , \quad \frac{\delta^2 - y_1^2 - z_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

und aus diesen folgende zwei:

$$\frac{x^2}{\delta^2 - \frac{y^2}{z^2} \cdot z_1^2 - z_1^2} = \frac{y^2}{\frac{y^2}{z^2} \cdot z_1^2} ,$$

$$\frac{\delta^2 - \frac{y^2}{z^2} \cdot z_1^2 - z_1^2}{a^2} + \frac{\frac{y^2}{z^2} \cdot z_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 .$$

Mit dem Wert von z_1^2 aus der ersteren:

$$z_1^2 = \frac{z^2 \delta^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ergibt die andere:

$$\frac{x^2 \delta^2}{a^2(x^2+y^2+z^2)} + \frac{y^2 \delta^2}{b^2(x^2+y^2+z^2)} - \frac{z^2 \delta^2}{c^2(x^2+y^2+z^2)} - 1 = 0, \text{ oder:}$$

$$(112.) \qquad 0 = x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) - z^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) ,$$

die gesuchte Gleichung des Cuspidalkegels. Diese können wir, da:

$$\delta^2 - a^2 = \frac{k_2^2 + 4a^2b^2c^2(b^2 - a^2)}{4a^2b^2c^2} = \frac{k_1^2}{4a^2b^2c^2} ,$$

$$\delta^2 - b^2 = \frac{k_2^2}{4a^2b^2c^2} ,$$

$$\delta^2 + c^2 = \frac{k_2^2 + 4a^2b^2c^2(b^2 + c^2)}{4a^2b^2c^2} = \frac{k_3^2}{4a^2b^2c^2} ,$$

auch in folgende Gestalt bringen:

(113.) $$0 = k_1^2 b^2 c^2 x^2 + k_2^2 c^2 a^2 y^2 - k_3^2 a^2 b^2 z^2.$$

Zu dem Cuspidalkegel werden wir auch hingeführt durch den Torsus, der von dem Continuum der Ebenen der Fusspunktkegelschnitte der Fläche H^2 eingehüllt wird. Dieser Torsus muss zweiten Grades sein, weil durch jeden Punkt der Fläche H^2 zwei Fusspunktkegelschnitte gehen, was sich daraus ergibt, dass jeder Punkt auf jeder Gerade als Fusspunkt eines kürzesten Lots zwischen dieser und noch einer andern im allgemeinen zu zwei Geraden gehört; also ist er ein Kegel zweiten Grades, dessen Spitze, weil die Ebene jedes Fusspunktkegelschnitts durch den Mittelpunkt O der Fläche H^2 geht, ebenfalls in O zu liegen kommt. Die Fläche H^2 muss dieser Kegel zweiten Grades notwendig in den Punkten schneiden, für welche die beiden durch sie gehenden Fusspunktkegelschnitte sich vereinigen, also in dem Continuum der Cuspidalpunkte; denn die auf einer Gerade g gelegenen Cuspidalpunkte D und D, und nur diese beiden Punkte, sind von der Beschaffenheit, dass je die beiden durch sie gehenden kürzesten Lote sich vereinigen, also sind es auch die einzigen Punkte auf g, für welche die beiden durch sie gehenden Fusspunktkegelschnitte zusammenfallen. Die Gleichung unseres Kegels wird erhalten durch die Elimination des Parameters γ aus der Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$:

$$0 = bck_1(\gamma^2 - 1)x + 2cak_2\gamma y - abk_3(\gamma^2 + 1)z$$

und der Gleichung:

$$0 = bck_1\gamma x + cak_2 y - abk_3\gamma z,$$

die aus jener durch Differentiation nach γ hervorgeht. Durch Subtraktion jener ersten Gleichung von der mit γ multiplizierten zweiten findet sich:

$$\gamma = \frac{b(ck_1x + ak_3z)}{cak_2y},$$

während aus der zweiten selbst folgt:

$$\gamma = \frac{cak_2y}{b(-ck_1x + ak_3z)}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für γ gewinnen wir:

$$0 = k_1^2 b^2 c^2 x^2 + k_2^2 c^2 a^2 y^2 - k_3^2 a^2 b^2 z^2,$$

die in (113.) erlangte Gleichung des Cuspidalkegels. Auch ergibt sich hieraus nochmals, dass beide Geradenschaaren denselben Kegel, mithin auch dasselbe auf der Fläche H^2 verlaufende Continuum von Cuspidalpunkten liefern.

Auf jeder Cuspidaltransversale liegen zwei Cuspidalpunkte, oder, anders gesagt, jede Cuspidaltransversale wird von der Cuspidalkurve in zwei im allgemeinen von einander getrennten Punkten geschnitten. Auf die Frage nach der Anzahl der Cuspidaltransversalen, welche von der Cuspidalkurve berührt werden, gibt der Grad der Gleichung Bescheid:

(114.) $$0 = \gamma^4 - 2\gamma^2 \frac{k_2(k_3 - k_1) + 2k_3 k_1}{k_2(k_3 + k_1)} + 1,$$

die aus der Beziehung (108.) hervorgeht, wenn dort $\gamma_D = \gamma$ gesetzt wird. *In dem zur g-Schaar gehörigen Continuum der Cuspidaltransversalen finden sich somit vier, welche von der Cuspidalkurve berührt werden.* Indem wir das festgestellt haben, haben wir zugleich diejenigen Geraden g ermittelt, mit welchen sich je eine der beiden zu ihnen gehörigen Geraden g_D vereinigt. Fragen wir andererseits, wie oft eine Gerade vorhanden ist, mit der sich die ihr zugehörige Gerade g_ω vereinigt, so müssen wir genau dieselbe Antwort wie vorhin erhalten, was uns z. B. die Beziehung (53.) des § 2 bestätigt. Denn für $\gamma_\omega = \gamma$ liefert diese:

$$\gamma^2 = \frac{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) + k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)}{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) - k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)},$$ das ist:

$$0 = k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1)^2 - k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)^2,$$ oder:

(114_1.) $$0 = (\gamma^2 - 1)^2(c^2 + a^2) b^2 k_2 - 4\gamma^2(b^2 + c^2) a^2 k_1,$$ oder:

$$0 =$$

$$(\gamma^4 + 1)(c^2 + a^2) b^2 k_2 - 2\gamma^2[(b^2 - a^2) k_3 c^2 + (b^2 + c^2) k_1 a^2],$$ oder:

$$0 = \gamma^4 - 2\gamma^2 \frac{k_3(k_1 + k_2) - k_1(k_2 - k_3)}{k_2(k_3 + k_1)} + 1,$$

was genau die Gleichung (114.) ist. Sei g_Θ eine von den vier durch diese Gleichung gelieferten Geraden, so fällt ihr Centralpunkt in denjenigen der beiden auf ihr gelegenen Cuspidalpunkte, in welchem die Cuspidalkurve die durch ihn gehende Cuspidaltransversale berührt, also vereinigen sich in ihm nicht nur zwei konsekutive Punkte der Cuspidalkurve, sondern auch zwei konsekutive Punkte der zur g-Schaar gehörigen Striktionslinie, sodass in ihm beide Kurven sich berühren. Denn rückt allgemein eine Gerade g_D unendlich nahe an g heran, so ist der betreffende auf g gelegene Cuspidalpunkt zugleich Centralpunkt von g, und der ihm unendlich nahe gelegene Cuspidalpunkt von g_D ist zugleich Centralpunkt auf g_D wegen des reziproken Verhaltens der Geraden g und g_D, folglich liegen unsere beiden unendlich nahen Cuspidalpunkte auf der Striktionslinie der g-Schaar. Somit berührt die Striktionslinie der g-Schaar viermal die Cuspidalkurve. Weitere gemeinsame Punkte als diese acht können die beiden Kurven nicht haben; denn unsere Striktionslinie ist eine Kurve vierter Ordnung zweiter Art, und eine Kurve vierter Ordnung erster Art und eine solche zweiter Art, welche auf derselben Fläche zweiten Grades liegen, begegnen sich nur in acht Punkten. Genau dasselbe, was wir eben von der g-Schaar ermittelt haben, gilt auch für die l-Schaar. Rekapitulieren wir: *In dem zur g-Schaar als auch in dem zur l-Schaar gehörigen Continuum von Cuspidaltransversalen finden sich vier, welche von der Cuspidalkurve berührt werden; in denselben Punkten berührt auch die zur jeweiligen Schaar gehörige Striktionslinie die Cuspidalkurve.*

Bezüglich der Realität der Wurzeln von (114.) fügen wir noch einige Bemerkungen bei.

Liegt allgemein die biquadratische Gleichung vor:

$$\gamma^4 + A\gamma^2 + B\gamma + C = 0,$$

so ist ihre Diskriminante gegeben dnrch:

$$27D = 4(A^2 + 12C)^3 - (2A^3 - 72CA + 27B^2)^2,$$

und die Algebra[1]) lehrt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von vier verschiedenen reellen Wurzeln ist:

$$D > 0, A < 0, A^2 - 4C > 0,$$

und dass in allen andern Fällen, wo $D > 0$, die Gleichung vier imaginäre Wurzeln hat.

In unserem Falle ist $B = 0$, $C = 1$, und wir haben:

$27D = 4[(A^2+12)^3 - A^2(A^2-36)^2] = 4 \cdot 12 \cdot 9(A^2-4)^2$, d. h.:

$$D > 0, \text{ solange } A^2 \neq 4.$$

Nun ist weiter:

$$A = -2\frac{k_2(k_3 - k_1) + 2k_3k_1}{k_2(k_3 + k_1)} = -2\frac{k_2c^2a^2 + k_3k_1}{k_2b^2(c^2 + a^2)},$$

$$A^2 - 4C = A^2 - 4$$

$$= \frac{4[[k_2(k_3 - k_1) + 2k_3k_1]^2 - k_2^2(k_3 + k_1)^2]}{k_2^2(k_3 + k_1)^2}$$

$$= \frac{16k_3k_1(k_3 - k_2)(k_1 + k_2)}{k_2^2(k_3 + k_1)^2}$$

$$= \frac{16 \cdot 4k_3k_1c^2a^2(b^2 + c^2)(b^2 - a^2)}{k_2^2(k_3 + k_1)^2}.$$

Die Grösse k_3 ist stets > 0. Wegen $a > b$ ist $b^2 - a^2 < 0$ und $k_2 < 0$. Ist also $k_1 < 0$, so ist $(A^2-4) > 0$, $A < 0$, und es ergeben sich vier verschiedene reelle Wurzeln. Ist hingegen $k_1 > 0$, so ist $(A^2-4) < 0$, und da zudem stets $D > 0$, so sind in diesem Falle vier imaginäre Wurzeln vorhanden. *Die Gleichung (114.) hat demnach vier verschiedene reelle Wurzeln dann und nur dann, wenn $k_1 < 0$; ist dagegen $k_1 > 0$, so sind die Wurzeln immer imaginär. Der Uebergangsfall $k_1 = 0$ tritt nur bei einem orthogonalen Hyperboloide ein* und wird im nächsten § erledigt. Erwähnt sei hier jedoch noch, dass die biquadratische Gleichung

α) zwei Paar gleicher reeller Wurzeln hat, falls:

$$D = 0, A < 0, A^2 - 4C = 0,$$

und dass diese drei Bedingungen in unserem Falle allein durch $k_1 = 0$ erfüllt werden;

[1]) S. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. I. § 78.

β) zwei Paar gleicher imaginärer Wurzeln hat, wenn:

$$D = 0,\ A > 0,\ A^2 - 4C = 0,$$

und dass diesen drei Bedingungen in unserem Falle nur genügt wird durch:

$$k_1 + k_2 = 0,\ \text{d. h.}: b^2 - a^2 = 0,$$

was ein Rotationshyperboloid voraussetzt.

Hat uns die Beziehung (107.) Aufschluss gegeben über die Kurve der Cuspidalpunkte, so gibt uns die andere aus den beiden Gleichungen (105.), (106.) hergeleitete Beziehung (108.) Aufschluss über die von den Cuspidaltransversalen erzeugte Regelfläche. Eines wissen wir schon von ihr, nämlich, dass die Cuspidalkurve auf ihr gelegen ist.

Für das Folgende ist es vorteilhaft, der Beziehung (108.) noch eine andere Gestalt zu geben, nämlich:

(108$_1$.) $0 = -k_2 c^2 a^2 (\gamma + \gamma_D)^2 - k_3 a^2 b^2 (\gamma\gamma_D + 1)^2 + k_1 b^2 c^2 (\gamma\gamma_D - 1)^2,$

oder kurz:

$0 = n_1(\gamma + \gamma_D)^2 + n_2(\gamma\gamma_D + 1)^2 + n_3(\gamma\gamma_D - 1)^2,$ wobei:

$n_1 = -k_2 c^2 a^2,\ n_2 = -k_3 a^2 b^2,\ n_3 = k_1 b^2 c^2.$

Die durch D gehende Cuspidaltransversale für die g-Schaar sei p_D. Sind nun D′, D″, D‴ die Coordinaten von D und bedeuten p_D', p_D'', p_D''' zu den Richtungskosinussen von p_D proportionale Werte, so können wir als Gleichungen von p_D ansetzen:

$$(115.)\quad \frac{y - D''}{p_D''} = \frac{x - D'}{p_D'},\ \frac{z - D'''}{p_D'''} = \frac{x - D'}{p_D'},\quad \text{wobei:}$$

$$(116.)\quad p_D' = \frac{1}{a}(\gamma\gamma_D - 1),\ p_D'' = -\frac{1}{b}(\gamma + \gamma_D),$$

$$p_D''' = \frac{1}{c}(\gamma\gamma_D + 1),$$

$$(117.)\quad D' = g' r_D + \mathfrak{x} =$$

$$\frac{(\gamma^4 - 1) r_D + 2\gamma^2 abc}{\gamma(\gamma^2 + 1) bc} =$$

$$a\,\frac{(\gamma^2 - 1)[2k_1\gamma\gamma_D + k_2(\gamma^2 - 1)] + 4\gamma(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)}{2(\gamma^2 + 1)(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)} =$$

$$a\,\frac{2k_1(\gamma^2-1)\gamma\gamma_D + k_2(\gamma^2+1)^2 - 2\gamma\gamma_D[k_3(\gamma^2+1)+k_1(\gamma^2-1)]}{2(\gamma^2+1)(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)} =$$

$$a\,\frac{k_2(\gamma^2+1) - 2k_3\gamma\gamma_D}{2(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)},$$

$$D'' = g''r_D + \mathfrak{y} =$$

$$\frac{-2(\gamma^2+1)r_D + (\gamma^2-1)abc}{(\gamma^2+1)ca} =$$

$$b\,\frac{-\gamma[2k_1\gamma\gamma_D + k_2(\gamma^2-1)] + (\gamma^2-1)(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)}{(\gamma^2+1)(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)} =$$

$$-b\gamma_D\frac{2k_1\gamma^2 + (\gamma^2-1)\vartheta}{(\gamma^2+1)(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)} = -b\gamma_D\,\frac{k_3(\gamma^2-1)+k_1(\gamma^2+1)}{2(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)},$$

$$D''' = g'''r_D$$

$$= -\frac{(\gamma^2+1)r_D}{ab\gamma} = -c\,\frac{k_2(\gamma^2-1)+2k_1\gamma\gamma_D}{2(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)}.$$

Die Gleichungen der durch den Anfangspunkt O parallel der Cuspidaltransversale p_D gezogenen Gerade können nach (116.) in der Gestalt geschrieben werden:

$$(118.)\qquad y\frac{b}{a} = -x\,\frac{\gamma+\gamma_D}{\gamma\gamma_D - 1}, \quad z\frac{c}{a} = x\,\frac{\gamma\gamma_D + 1}{\gamma\gamma_D - 1}.$$

Ein Blick auf die Beziehung (108_1.) fordert uns sofort auf, aus den beiden Gleichungen (118.) die folgende herzuleiten:

$$y^2\frac{b^2}{a^2}n_1 + z^2\frac{c^2}{a^2}n_2 = x^2\,\frac{(\gamma+\gamma_D)^2n_1 + (\gamma\gamma_D+1)^2n_2}{(\gamma\gamma_D-1)^2}$$

$$= -x^2n_3, \qquad \text{das ist:}$$

$$(119.)\qquad 0 = -x^2k_1 + y^2k_2 + z^2k_3.$$

Die durch den Punkt O parallel zu den Cuspidaltransversalen der g-Schaar gezogenen Geraden erfüllen also die Kantenreihe eines Kegels zweiten Grades, dessen Gleichung in (119.) vorliegt. Zugleich erkennen wir, dass *die Cuspidaltransversalen der l-Schaar zu demselben Kegel führen.* Das Continuum der Cuspidaltransversalen schneidet also die unendlich

ferne Ebene in einer Kurve zweiten Grades, womit sich die dasselbe tragende Fläche schon jetzt als vom zweiten Grade seiend und folglich dem durch die H^2 und ihrer Cuspidalkugel konstituierten Flächenbüschel angehörend erweist. Und es liegt die Vermutung nahe, dass wir zur Gleichung der das Continuum der Cuspidaltransversalen tragenden Fläche in ähnlicher Weise vordringen können wie zur Gleichung jenes Kegels in (119.). Und das ist in der Tat der Fall.

Die Gleichungen der Cuspidaltransversale p_D lassen sich nach (115.) in die Gestalt bringen:

$$y\frac{b}{a} = -(x - D')\frac{\gamma + \gamma_D}{\gamma\gamma_D - 1} + \frac{bD''}{a},$$

$$z\frac{c}{a} = (x - D')\frac{\gamma\gamma_D + 1}{\gamma\gamma_D - 1} + \frac{cD'''}{a},$$

und aus ihnen bilden wir folgende neue:

(120.)
$$y^2\frac{b^2}{a^2}n_1 + z^2\frac{c^2}{a^2}n_2 =$$
$$-x^2 n_3 + D'^2 n_3 + \frac{b^2 D''^2}{a^2}n_1 + \frac{c^2 D'''^2}{a^2}n_2$$
$$+\frac{2(x - D')}{a(\gamma\gamma_D - 1)}[aD'(\gamma\gamma_D - 1)n_3 - bD''(\gamma + \gamma_D)n_1$$
$$+ cD'''(\gamma\gamma_D + 1)n_2].$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung in eckige Parenthese eingeschlossene Summe verschwindet wegen der Beziehung (108.). Es ist nämlich:

$$\frac{2(\gamma k_2 - \gamma_D \vartheta)}{a^2 b^2 c^2}[aD'(\gamma\gamma_D - 1)n_3 - bD''(\gamma + \gamma_D)n_1 + cD'''(\gamma\gamma_D + 1)n_2] =$$
$$k_1(\gamma\gamma_D - 1)[k_2(\gamma^2 + 1) - 2k_3\gamma\gamma_D] - k_2\gamma_D(\gamma + \gamma_D)[k_3(\gamma^2 - 1) + k_1(\gamma^2 + 1)]$$
$$+ k_3(\gamma\gamma_D + 1)[k_2(\gamma^2 - 1) + 2k_1\gamma\gamma_D] =$$
$$-\gamma^2\gamma_D{}^2 k_2(k_3 + k_1) + \gamma^2 k_2(k_3 - k_1) + \gamma_D{}^2 k_2(k_3 - k_1)$$
$$+ 4k_3 k_1\gamma\gamma_D - k_2(k_3 + k_1) = 0.$$

Folglich erhalten wir aus (120.):

$$y^2\frac{b^2}{a^2}n_1 + z^2\frac{c^2}{a^2}n_2 = -x^2n_3 + D'^2n_3 + \frac{b^2D''^2}{a^2}n_1 + \frac{c^2D'''^2}{a^2}n_2,$$

das ist:

(121.) $$y^2k_2 + z^2k_3 = x^2k_1 + (-D'^2k_1 + D''^2k_2 + D'''^2k_3).$$

Der Ermittelung der Summe in der runden Klammer wenden wir uns jetzt zu: Es ist:

$$-D'^2k_1 + D''^2k_2 + D'''^2k_3 =$$

$$\frac{1}{4(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2}[-a^2k_1[k_2(\gamma^2+1) - 2k_3\gamma\gamma_D]^2$$
$$+ b^2\gamma_D{}^2[k_3(\gamma^2-1) + k_1(\gamma^2+1)]^2k_2$$
$$+ c^2k_3[k_2(\gamma^2-1) + 2k_1\gamma\gamma_D]^2] =$$

$$\frac{k_2}{4(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2}[\gamma^4\gamma_D{}^2b^2(k_3+k_1)^2 + \gamma^4(-a^2k_1 + c^2k_3)k_2$$
$$+(-a^2k_1 + c^2k_3)k_2 + 4\gamma\gamma_Dk_3k_1[\gamma^2(c^2+a^2)+a^2-c^2]$$
$$- 2\gamma^2k_2(a^2k_1 + c^2k_3) + 2\gamma^2\gamma_D{}^2[b^2(k_1{}^2 - k_3{}^2)$$
$$+ 2k_3k_1(c^2+a^2)] + \gamma_D{}^2b^2(k_3 - k_1)^2].$$

Hierin ersetzen wir das Produkt $4\gamma\gamma_Dk_3k_1$ durch seinen Wert aus der Beziehung (108.) und erhalten:

$$-D'^2k_1 + D''^2k_2 + D'''^2k_3 =$$

$$\frac{k_2}{4(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2}[\gamma^4\gamma_D{}^2(k_3+k_1)[b^2(k_3+k_1) + (c^2+a^2)k_2]$$
$$+ \gamma^4k_2{}^2(c^2+a^2) - k_2{}^2(c^2+a^2)$$
$$+ 2\gamma^2\gamma_D{}^2[b^2(k_1{}^2-k_3{}^2)+2k_3k_1(c^2+a^2)+k_2(k_1a^2-k_3c^2)]$$
$$+ \gamma_D{}^2(k_1 - k_3)[b^2(k_1 - k_3) + k_2(a^2 - c^2)]] =$$

$$\frac{k_2}{4(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2}[2\gamma^4\gamma_D{}^2b^2(c^2+a^2)^2(2b^4+k_2) + \gamma^4k_2{}^2(c^2+a^2)$$
$$+ 2\gamma^2\gamma_D{}^2k_3k_1(c^2+a^2) - k_2{}^2(c^2+a^2)$$
$$+ 2\gamma_D{}^2c^2a^2[b^2(c^4+a^4) + c^2a^2(a^2-c^2)]].$$

Weiter ist:

$$(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2 =$$

$$\frac{1}{k_3k_1}[k_3k_1[\gamma^4\gamma_D{}^2b^4(c^2+a^2)^2+2\gamma^2\gamma_D{}^2a^2b^2c^2(c^2+a^2)+\gamma^2k_2{}^2+\gamma_D{}^2c^4a^4]$$
$$- 2\gamma\gamma_Dk_3k_1k_2[b^2(c^2+a^2)\gamma^2 + c^2a^2]].$$

Hierin setzen wir für das Produkt $2\gamma\gamma_D k_3 k_1$ den aus der Beziehung (108.) sich ergebenden Wert, nämlich:
$2k_3k_1\gamma\gamma_D = k_2[\gamma^2\gamma_D{}^2b^2(c^2+a^2) - \gamma^2c^2a^2 - \gamma_D{}^2c^2a^2 + b^2(c^2+a^2)]$
und erhalten:

$$(\gamma k_2 - \gamma_D\vartheta)^2 =$$

$$\frac{1}{k_3k_1}[\gamma^4\gamma_D{}^2b^4(c^2+a^2)^2(k_3k_1 - k_2{}^2) + \gamma^4a^2b^2c^2k_2{}^2(c^2+a^2) + 2\gamma^2\gamma_D{}^2k_3k_1a^2b^2c^2(c^2+a^2) + \gamma_D{}^2c^4a^4(k_3k_1+k_2{}^2) - k_2{}^2a^2b^2c^2(c^2+a^2)] =$$

$$\frac{a^2b^2c^2}{k_3k_1}[2\gamma^4\gamma_D{}^2b^2(c^2+a^2)^2(2b^4+k_2) + \gamma^4k_2{}^2(c^2+a^2) - k_2{}^2(c^2+a^2) + 2\gamma^2\gamma_D{}^2k_3k_1(c^2+a^2) + 2\gamma_D{}^2c^2a^2[b^2(c^4+a^4+c^2a^2(a^2-c^2)]].$$

Demnach gewinnen wir:

$$-D'^2k_1 + D''^2k_2 + D'''^2k_3 = \frac{k_1k_2k_3}{4a^2b^2c^2}.$$

Damit wird aus Gleichung (121.):

$$(122_0.)\qquad y^2k_2 + z^2k_3 = x^2k_1 + \frac{k_1k_2k_3}{4a^2b^2c^2}, \text{ das ist:}$$

$$(122.)\qquad 0 = \frac{x^2}{\frac{k_2k_3}{4a^2b^2c^2}} + \frac{y^2}{\frac{k_3k_1}{4a^2b^2c^2}} + \frac{z^2}{\frac{k_1k_2}{4a^2b^2c^2}} - 1,$$

wobei die Grössen k folgende Bedeutung haben:

$$k_1 = b^2c^2 - c^2a^2 + a^2b^2, \quad k_2 = b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2,$$
$$k_3 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

Somit ist erkannt, dass *die Cuspidaltransversalen, zugehörig den Geraden der g-Schaar, eine Regelschaar erzeugen, und diejenigen, die zu den Geraden der l-Schaar gehören, erzeugen die verbundene Regelschaar. Die beide Regelschaaren tragende Fläche* — sie sei mit $H_D{}^2$ bezeichnet — *ist, wie ihre Gleichung (122.) lehrt, mit H^2 konzentrisch und koaxial.* Die Grösse k_3 ist stets positiv, und weil $a > b$ vorausgesetzt wurde, ist k_2 negativ, das Produkt $-k_2k_3$ also stets positiv. Demnach hängt es von dem Vorzeichen der Grösse k_1 ab, ob $\frac{k_3k_1}{4a^2b^2c^2}$ oder $\frac{k_1k_2}{4a^2b^2c^2}$ das Quadrat der imaginären

Halbaxe ist. Der erste Fall tritt ein für negatives k_1, für positives k_1 hingegen der zweite. Ist $c < b$ und mithin auch $c < a$, so ist k_1 stets positiv, es tritt dann also stets der zweite Fall ein; ist aber $c > b$, so kann sowohl der eine als auch der andere Fall eintreten.

Die Cuspidalkurve der H^2 liegt auch auf der $H_D{}^2$ und sie stellt für diese die Orthogonalkurve dar. Um das darzutun, genügt es den Nachweis zu führen, dass die Cuspidalkugel der H^2 die Orthogonalkugel der $H_D{}^2$ ist. Das Quadrat des Radius der Cuspidalkugel von H^2 ist nach (111.):

$$(123.)\quad \delta^2 = \frac{1}{4a^2b^2c^2}[b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)]$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2c^2}[-[b^4c^4 - a^4(b^2+c^2)^2] + [b^4(c^2+a^2)^2 - c^4a^4] + [c^4(b^2-a^2)^2 - a^4b^4]]$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2c^2}(-k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2).$$

Beachten wir nun, dass das Quadrat des Radius der Orthogonalkugel eines Hyperboloids erhalten wird, indem man die Summe der Quadrate seiner drei Halbachsen bildet[1]), so gewinnen wir für das Quadrat des Radius P_D der Orthogonalkugel der Fläche $H_D{}^2$ nach (122.):

$$P_D{}^2 = \frac{1}{4a^2b^2c^2}(-k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2),$$

womit nach (123.) erkannt ist, dass:

$$\delta = P_D,$$

die Cuspidalkugel der Fläche H^2 also die Orthogonalkugel der Fläche $H_D{}^2$ ist. Hieraus geht weiter hervor, dass die beiden durch einen Punkt der Cuspidalkurve gehenden Cuspidaltransversalen senkrecht auf einander stehen.

---

[1]) S. No. 25 in Walther Ludwigs Inauguraldissertation, Breslau 1898—1899, „Über die Ebenen, welche aus einer Fläche zweiten Grades einem gegebenen Kegelschnitt ähnliche Kegelschnitte ausschneiden."

Nach dem Ausdruck für den Radius der Cuspidalkugel der Fläche H^2 können wir leicht den Radius δ_D der Cuspidalkugel der Fläche $H_D{}^2$ bilden. Es ergibt sich:

(124.) $$\delta_D{}^2 =$$

$$\frac{k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2}{16\,a^2b^2c^2} + \frac{1}{8\,a^2b^2c^2}(-k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2) =$$

$$\frac{5(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4) + 6a^2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{16\,a^2b^2c^2}.$$

Das können wir noch in andere Form giessen, nämlich:

(125.) $$\delta_D{}^2 =$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{4\,a^2b^2c^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} =$$

$$\frac{5}{4}\,\delta^2 - \frac{1}{4}\,P^2,$$

wenn mit P der Radius der Orthogonalkugel von H^2 bezeichnet wird. Aus (125.) folgt:

(126.) $$4\delta^2 - P^2 = 4\delta_D{}^2 - P_D{}^2.$$

Das heisst: *Die Differenz des vierfachen Quadrats des Radius der Cuspidalkugel und des Quadrats des Radius der Orthogonalkugel ist für beide Flächen H^2 und $H_D{}^2$ dieselbe.*

Nun ist:

(127.) $$4\delta^2 - P^2 =$$

$$\frac{b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{a^2b^2c^2} - (a^2 + b^2 - c^2) =$$

$$\frac{b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4}{a^2b^2c^2} + a^2 + b^2 - c^2 =$$

$$\frac{a^4b^4 + a^2b^2c^2(a^2 + b^2) + c^4[(a^2 - b^2)^2 + a^2b^2]}{a^2b^2c^2},$$

und das ist stets positiv. Die Radien $P_D = \delta$ und δ_D sind stets reell, P jedoch nur dann, wenn $a \geq c$. Ist P imaginär, P^2 also negativ, so ist selbstverständlich $(4\delta^2 - P^2) > 0$. Dass die Differenz $4\delta^2 - P^2$ aber auch dann positiv ist, wenn P

reell, also $P^2 > 0$ ist, zeigt (127.) Da also $4\delta^2 - P^2$ stets positiv ist, so ist es auch $4\delta_D{}^2 - P_D{}^2$, das heisst, es ist stets:

$$2\delta_D > P_D,$$

in Worten: *Der Radius der Orthogonalkugel der Fläche* $H_D{}^2$ *ist stets kleiner als das Doppelte des Radius ihrer Cuspidalkugel.*

§ 6.

Die Besonderheiten des orthogonalen Hyperboloids hinsichtlich der behandelten Verhältnisse.

Der im § 2 behandelte Satz, dass jeder Punkt auf jeder Gerade der Regelschaar im allgemeinen zweimal Fusspunkt eines kürzesten Lots zwischen dieser und noch einer andern ist, legt die Frage nahe, ob es Regelschaaren gibt, in denen sich Geraden von der Beschaffenheit finden, dass ein auf ihnen gelegener Punkt Fusspunkt von mehr als zwei und damit von einfach unendlich vielen kürzesten Loten ist.

Sei g eine Gerade der Regelschaar und P ein auf ihr gelegener Punkt bestimmt durch den Parameter r, so werden die Parameter γ_σ derjenigen beiden Geraden g_σ, für welche die kürzesten Lote zwischen ihnen und der g durch den auf g gelegenen Punkt P gehen, nach (44.) des § 2 durch die quadratische Gleichung geliefert:

$$0 = \gamma_\sigma{}^2 [r(\gamma^2 + 1)\vartheta + \gamma^2 abck_1] + \gamma_\sigma \gamma k_2 [-2r(\gamma^2 + 1) + abc(\gamma^2 - 1)] + r(\gamma^2 + 1)\upsilon - \gamma^2 abck_1.$$

Soll diese Gleichung mehr als zwei Wurzeln haben, mithin für ∞^1 Werte γ_σ befriedigt werden, so müssen ihre Coefficienten sämtlich verschwinden, also:

(128.)
$$\begin{aligned} 0 &= r(\gamma^2 + 1)\vartheta + \gamma^2 abck_1, \\ 0 &= \gamma k_2 [-2r(\gamma^2 + 1) + abc(\gamma^2 - 1)], \\ 0 &= r(\gamma^2 + 1)\upsilon - \gamma^2 abck_1. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen müssen uns Werte für γ und r und eine Beziehung zwischen den Halbachsen der Fläche geben.

Da nach unserer Voraussetzung über die Länge der reellen Halbaxen die Grösse k_2 stets $\neq 0$, so ist die zweite Gleichung des Systems (128.) einfach:

(129.) $$0 = \gamma\,[-2r(\gamma^2+1) + abc(\gamma^2-1)].$$

Die Addition der ersten und dritten Gleichung in (128.) ergibt:

$$0 = rk_3(\gamma^2+1)^2, \text{ das ist wegen } k_3 \neq 0:$$

(130.) $$0 = r(\gamma^2+1)^2.$$

Wäre $\gamma^2 + 1 = 0$, so ergäbe die Gleichung (129.):

$\gamma^2 - 1 = 0$, was aber jener Annahme widerspricht.

Also kann der Gleichung (130.) nur genügt werden durch:

(131.) $$0 = r.$$

Daraus geht hervor, dass der fragliche Punkt P auf der Kehlellipse liegen muss. Für $0 = r$ geht die erste sowohl als auch die dritte Gleichung in (128.) über in:

(132.) $$0 = \gamma^2 k_1.$$

Diejenige Erzeugende aber, welcher der Parameter $\gamma = 0$ zukommt, zeigt nach (44_1.) die gewünschte Eigenschaft nicht; mithin fordert die Gleichung (132.):

(133.) $$0 = k_1.$$

Nun ergibt mit $\gamma \neq 0$, $r = 0$ die Gleichung (129.):

(134.) $$0 = \gamma^2 - 1.$$

Dem Gleichungssystem (128.) wird also nach den in (131.), (133.), (134.) gewonnenen Ergebnissen allein genügt durch:

(**135.**) $$r = 0, \quad \gamma = \pm 1, \quad k_1 = 0.$$

Das Verschwinden der Grösse k_1 [1]), nämlich:

$$0 = b^2c^2 - c^2a^2 + a^2b^2, \quad \text{d. i:}$$

$$0 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

---

[1]) S. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880, § 25 Seite 180, 181.

zeigt an, dass das in Rede stehende Hyperboloid ein orthogonales ist, und die beiden durch $\gamma^2 - 1 = 0$ bestimmten Geraden sind jene beiden aus der g-Schaar, welche die Axen für zwei projektive Ebenenbüschel abgeben, so dass durch die Schnittlinie je zweier zu einander rechtwinklicher Ebenen die Fläche erzeugt wird. Unsere Frage nach der Existenz von Regelschaaren, in denen sich Erzeugende von der Beschaffenheit finden, dass ein auf ihnen gelegener Punkt Fusspunkt von mehr als zwei und damit von ∞^1 kürzesten Loten ist, findet demnach in dem Satze ihre Antwort: „*Haben die Geraden einer Regelschaar die Eigenschaft, dass ihre kürzesten Lote mit einer und derselben unter ihnen, etwa* g_{01}, *durch den nämlichen auf dieser gelegenen Punkt gehen, so ist das Hyperboloid notwendig orthogonal, und neben der Gerade* g_{01} *spielt eine und nur eine andere* g_{02} *aus derselben Schaar die gleiche Rolle, und zwar sind* g_{01} *und* g_{02} *diejenigen beiden Geraden, sodass die Ebenenbüschel um sie mit den zu einander rechtwinkligen Ebenen als entsprechenden in der Projektivität die Fläche erzeugen. Die Leitschaar hat zwei ebensolche Geraden* l_{01} *und* l_{02}.“

Während beim allgemeinen Hyperboloid die Ebene des zu einer Gerade g gehörigen Fusspunktkegelschnitts nicht normal ist zu g, weil eben beim allgemeinen Hyperboloid durch jeden Punkt einer Gerade nur zwei kürzeste Lote gehen, ist es allein das orthogonale Hyperboloid, wo sich zwei Geraden in jeder Schaar finden, für welche Normalität mit den Ebenen der zu ihnen gehörigen Fusspunktkegelschnitte besteht, und zwar tritt das für die Geraden g_{01}, g_{02} und l_{01}, l_{02} ein. Dieser Satz bot sich bereits in (58.) des § 3 dar.

Führt beim allgemeinen Hyperboloide jede Gerade zu einer hyperbolisch involutorischen Paarung sämtlicher Geraden derselben Schaar, so finden sich beim orthogonalen Hyperboloide, und nur bei diesem, in jeder Schaar zwei Geraden, die eine parabolisch involutorische Paarung der Geraden hervorrufen; das sind wieder die Geraden g_{01}, g_{02} und l_{01}, l_{02}. Bei einem allgemeinen Hyperboloide ist in der durch eine Gerade g hervorgerufenen Involution der g selbst die-

jenige im allgemeinen von ihr verschiedene Gerade g_ω gepaart, welche ihr kürzestes Lot mit g nach dem Centralpunkt ω von g hinsendet. Da nun beim orthogonalen Hyperboloid jede der Geraden g_{01}, g_{02} zu einer parabolisch involutorischen Paarung führt, so ist der Gerade g_{01} als auch der Gerade g_{02} in der durch sie inducierten Paarung nicht nur eine einzige Gerade zugeordnet, sondern jede beliebige Gerade. Das besagt z. B. die Formel (53.) des § 2:

$$\gamma\gamma_\omega = \frac{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) + k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)}{k_3 c^2(b^2 - a^2)(\gamma^2 - 1) - k_1 a^2(b^2 + c^2)(\gamma^2 + 1)}.$$

Denn diese lehrt, dass, wenn $k_1 = 0$, wenn also das Hyperboloid ein orthogonales ist, für die beiden durch $\gamma^2 - 1 = 0$ bestimmten Geraden aus der g-Schaar je die zugehörige Gerade g_ω unbestimmt wird, sodass also für sie jede beliebige Gerade die Gerade g_ω sein kann.

Ist eine Gerade g von der Beschaffenheit, dass ein auf ihr gelegener Punkt P Fusspunkt von mehr als zwei und damit von ∞^1 kürzesten Loten ist, so müssen in diesen Punkt P auch die beiden Cuspidalpunkte D,D rücken, sodass die Strecke $D\bar{D}$ zu Null wird. Das orthogonale Hyperboloid und nur dieses, hat also in jeder Schaar zwei Geraden, auf denen ihre beiden Cuspidalpunkte zusammenrücken. Davon überzeugt uns direkt die Formel (46_1.) des § 2:

$$(136.) \quad DD^2 = \frac{(\gamma^2 - 1)^2(c^2 + a^2)k_2^2 + 4\gamma^2(b^2 + c^2)k_1^2}{a^2b^2c^2[(\gamma^2 - 1)^2(c^2 + a^2) + 4\gamma^2(b^2 + c^2)]}.$$

Für ein reelles γ verschwindet der Zähler dieses Bruchs, oder, was dasselbe besagt, die beiden Punkte D,D fallen dann und nur dann zusammen, wenn folgende beiden Beziehungen gleichzeitig bestehen:

$$0 = \gamma^2 - 1, \; 0 = k_1,$$

das heisst, *beim orthogonalen Hyperboloide und nur bei diesem tritt es ein, dass auf zwei Geraden,* g_{01}, g_{02}, *die auf ihnen gelegenen Cuspidalpunkte in einen Punkt zusammenrücken. Genau dasselbe gilt für die Geraden* l_{01}, l_{02}.

Die Strecke $D\overline{D}$ auf der Gerade g enthält stets den Centralpunkt ω von g. Fallen die beiden Cuspidalpunkte zusammen, so fällt in sie auch noch der Centralpunkt ω hinein, und das also findet beim orthogonalen Hyperboloide auf den Geraden g_{01}, g_{02} und l_{01}, l_{02} statt. Die Frage, ob bei einem Hyperboloide der Centralpunkt einer Gerade in einen der beiden Cuspidalpunkte zu liegen kommen könnte, ohne dass auch der andere noch mit ihm sich vereinigte, d. h., ohne dass das Hyperboloid ein orthogonales wäre, wird in (114_1.) des § 5 mitbeantwortet. Denn die Gleichung (114_1.) liefert die Parameter von vier Geraden von folgender Beschaffenheit: Auf jeder von ihnen fällt der Centralpunkt in einen der Cuspidalpunkte hinein, während der andere Cuspidalpunkt von ihm getrennt liegt. Lägen die Cuspidalpunkte auf diesen vier Geraden vereinigt, so müsste nach (136.) der Gleichung:

(137.) $$0 = (\gamma^2 - 1)^2(c^2 + a^2)k_2^2 + 4\gamma^2(b^2 + c^2)k_1^2$$

durch die Gleichung (114_1.) genügt werden:

138.) $$0 = (\gamma^2 - 1)^2(c^2 + a^2)k_2 b^2 - 4\gamma^2(b^2 + c^2)k_1 a^2 .$$

Tragen wir den hieraus für $4\gamma^2(b^2 + c^2)k_1$ sich ergebenden Wert in die Gleichung (137.) ein, so kommt:

$$0 = (\gamma^2 - 1)^2 (a^2k_2 + b^2k_1)(c^2 + a^2)k_2.$$

Die aus $(\gamma^2 - 1)^2 = 0$ resultierenden Werte von γ befriedigen aber weder die Gleichung (137.) noch die Gleichung (138.) Bei einem allgemeinen Hyperboloide fällt also auf jeder der vier durch die biquadratische Gleichung (114_1.) oder (114.) bestimmten Geraden der Centralpunkt in einen der beiden Cuspidalpunkte, ohne dass noch der andere Cuspidalpunkt in ihn hineinrückt. Ist aber das Hyperboloid ein orthogonales, d. h. ist $k_1 = 0$, so geht die Gleichung (114_1.) oder (114.) über in:

$$0 = (\gamma^2 - 1)^2,$$

sie hat also hier zwei Paar gleiche reelle Wurzeln, und zwar ergeben sich genau die beiden Geraden g_{01}, g_{02}, jede doppelt. Und auf diesen beiden Geraden findet ja auch das Zusammen-

fallen der Cuspidalpunkte statt. *Das orthogonale Hyperboloid ist die einzige Fläche, für welche die biquadratische Gleichung* (*114*$_1$.) *oder* (*114.*) *zwei Paar gleiche reelle Wurzeln hat,* wie schon auf Seite 61 erwähnt wurde.

Der Cuspidalkegel, der beim allgemeinen Hyperboloid ein Kegel zweiten Grades ist, *artet beim orthogonalen Hyperboloid in ein Ebenenpaar aus, und daher zerfällt die Cuspidalkurve in diejenigen beiden Kegelschnitte, welche von diesem Ebenenpaar aus dem Hyperboloide herausgeschnitten werden.* Dass ferner *diese beiden Kegelschnitte Kreise und zugleich die zu den Erzeugenden* g_{01}, g_{02} *gehörigen Fusspunktkegelschnitte sind,* soll im Folgenden gezeigt werden.

Die Gleichung des Cuspidalkegels lautet nach (113.):

$$0 = k_1^2 b^2 c^2 x^2 + k_2^2 c^2 a^2 y^2 - k_3^2 a^2 b^2 z^2 .$$

Setzen wir hierin $k_1 = 0$, so kommt:

(139.) $$0 = k_2^2 c^2 y^2 - k_3^2 b^2 z^2.$$

Es ist aber:

$$k_2 = k_1 - 2a^2 b^2, \quad k_3 = k_1 + 2c^2 a^2, \text{ also mit } k_1 = 0:$$
$$k_2 = -2a^2 b^2, \quad k_3 = 2c^2 a^2,$$

sodass wir aus (139.) erhalten:

(**140.**) $$0 = y^2 b^2 - z^2 c^2 = (yb + zc)(yb - zc),$$

und dieses Ebenenpaar stellt den Cuspidalkegel des orthogonalen Hyperboloids dar. Der Cuspidalkegel schneidet aber das Hyperboloid stets in der Cuspidalkurve. Mithin bilden die beiden von dem Ebenenpaar (140.) ausgeschnittenen Kegelschnitte zusammen die Cuspidalkurve des orthogonalen Hyperboloids. Dass diese beiden Kegelschnitte Kreise sind, folgt unmittelbar daraus, dass sie ja auf einer Kugel, nämlich der Cuspidalkugel liegen. Denken wir uns die Gerade g_{01} durch den Parameter $\gamma = 1$ festgelegt, so nimmt nach (57.) des § 3 die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}_{01}$ die Gestalt an:

$$0 = k_2 cy - k_3 bz, \text{ d. i.:}$$

(140$_1$.) $$0 = yb + zc,$$

während für die Gerade g_{02}, die dann durch den Parameter $\gamma = -1$ bestimmt ist, die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}_{02}$ gegeben ist durch:

$$0 = k_2 cy + k_3 bz, \text{ d. i.:}$$

$$(140_2.) \qquad 0 = yb - zc.$$

Ein Vergleich mit dem Ergebnis in (139.) lehrt, dass die beiden Kreise, in welche die Cuspidalkurve des orthogonalen Hyperboloids zerfällt, zugleich auch die zu seinen Geraden g_{01}, g_{02} gehörigen Fusspunktkegelschnitte sind.

Eine überaus einfache Gestalt nimmt für das orthogonale Hyperboloid die Beziehung (108.) des § 5 an, nämlich:

$$0 = \gamma^2\gamma_D{}^2 - \gamma^2 - \gamma_D{}^2 + 1, \text{ das ist:}$$

$$(141.) \qquad 0 = (\gamma^2 - 1)(\gamma_D{}^2 - 1).$$

Was endlich die Fläche der Cuspidaltransversalen anlangt, so stellt sich deren Gleichung beim orthogonalen Hyperboloid nach $(122_0.)$ des § 5 dar als:

$$0 = y^2k_2 + z^2k_3,$$

das ist, wegen $k_2 = -2a^2b^2$, $k_3 = 2c^2a^2$:

$$0 = y^2b^2 - z^2c^2,$$

dasselbe Ebenenpaar, in welches der Cuspidalkegel zerfällt.

Bemerkenswerte Degenerationen treten auch ein für die zu den Geraden g_{01}, g_{02} und l_{01}, l_{02} eines orthogonalen Hyperboloids gehörigen Regelflächen dritten Grades R. Für die Gerade g_{01} z. B. wird das Continuum der kürzesten Transversalen zwischen ihr und sämtlichen andern Geraden von einem Tripel von Ebenen gebildet, von dem die eine die Ebene des zu g_{01} gehörigen Fusspunktkegelschnitts ist, während die beiden andern das Paar der durch g_{01} gehenden isotropen Ebenen sind. Das zeigt unmittelbar die Gleichung (89.) des § 3, wenn wir in ihr gleichzeitig $k_1 = 0$, $\gamma = 1$ setzen. Damit verschwinden nämlich die drei Grössen β_{11}, β_{22}, β_{12} sämtlich, und die Gleichung (89.) geht über in:

$$0 =$$

$$(yb+zc)[[b(xc-za)-ca(b-y)]^2\vartheta+[b(xc+za)-ca(b+y)]^2\upsilon$$
$$-2k_2[b(xc-za)-ca(b-y)][b(xc+za)-ca(b+y)]].$$

Nach $(140_1.)$ ist:

$$0 = yb + zc$$

die Gleichung der Ebene des zu g_{01} gehörigen Fusspunktkegelschnitts. Dass ferner die in eckiger Klammer eingeschlossene Grösse, gleich Null gesetzt, das Paar der isotropen Ebenen durch die Gerade g_{01} darstellt, folgt unmittelbar aus $(50_2.)$ des § 2 für $\gamma = 1$. Beachten wir, dass für $\gamma = 1$ und $k_1 = 0$ die Beziehungen statthaben:

$$\vartheta = \upsilon = 2c^2a^2,\ k_2 = -2a^2b^2,$$

so lässt sich die Gleichung des letztgenannten Paares isotroper Ebenen in der einfacheren Gestalt schreiben:

$$0 =$$

$$c^2[bc(x-a) + a(yc - zb)]^2 + c^2[bc(x-a) - a(yc - zb)]^2$$
$$+ 2b^2[b^2c^2(x-a)^2 - a^2(yc - zb)^2],\ \text{d. i.:}$$

$$0 =$$

$$b^2c^2(b^2 + c^2)(x-a)^2 + a^2(c^2 - b^2)(yc - zb)^2,\ \text{oder:}$$

$$0 =$$

$$(b^2 + c^2)(x-a)^2 + (yc - zb)^2.$$

Lebenslauf.

Am 31. März 1877 wurde ich, Bernhard Hepke, katholischen Glaubens, zu Breslau geboren als Sohn des Königlichen Zahlmeisters a. D. Anton Hepke und seiner verstorbenen Gemahlin Augusta, geb. Schnalke. Vorgebildet auf der katholischen Elementarschule Nr. VI zu Breslau, wurde ich Ostern 1888 in die Sexta des Realgymnasiums zum Heiligen Geist ebendaselbst aufgenommen. Mit dem Zeugnis der Reife verliess ich Ostern 1897 diese Anstalt. Auf der Universität Breslau studierte ich von Sommersemester 1897 bis Sommersemester 1902 vornehmlich Geometrie, Analysis und theoretische Physik und gehörte fünf bezw. vier Semester hindurch der mathematischen bezw. physikalischen Abteilung des mathematisch-physikalischen Seminars an unter den Herren Geheimen Regierungsräten Prof. Dr. Sturm und Prof. Dr. O. E. Meyer. In den Jahren 1902 und 1903 genügte ich meiner Militärpflicht. In den folgenden Semestern hörte ich philosophische und naturwissenschaftliche Vorlesungen, trat Ende Wintersemester 1904/1905 in die Promotion ein und promovierte zum Dr. phil. am 1. September 1905.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen, Seminarien und Praktika folgender Herren Professoren und Dozenten:

Abicht, Bobertag, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Heydweiller, Kükenthal, London, Leonhard, O. E. Meyer, Mez, Partsch, Pax, Rohde, Rosanes, Rosen, Stern, Sturm.

Allen meinen Lehrern spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus, insbesondere den Herren Geheimen Regierungsräten Prof. Dr. Sturm und Prof. Dr. O. E. Meyer für die Förderung meiner Kenntnisse und Studien durch die von ihnen geleiteten Uebungen.

Thesen.

1. Mathematischer Unterricht auf der Schule sollte in vollem Umfange den Lehrern Gelegenheit geben, ihre Tätigkeit durch den Wahlspruch bestimmt sein zu lassen ‚non scholae, sed vitae docemus', und so die reiferen Schüler das Wort ‚non scholae, sed vitae discimus' mit Verständnis erfassen zu lassen.
2. Hume's scharfe Unterscheidung von begrifflicher [mathematischer] Erkenntnis und der Erkenntnis von Tatsachen vermag als kräftiges Ferment bei Versuchen zur Aufstellung von Kriterien der Wahrheit zu dienen.
3. Die in den Schulen übliche Scheidung zwischen Planimetrie und Stereometrie ist künstlich, ihr Fortfall würde die nicht unerhebliche Bedeutung haben, der Fähigkeit des Schülers, im Raume denkend sich zu bewegen, zu einer wesentlichen Kräftigung verhelfen zu können.